

AN. 4 Les Nombres Réels**I. Corps des réels****a) Relation d'ordre****Définitions :**

- Une relation binaire \mathcal{R} sur un ensemble E est dite relation d'ordre si elle est réflexive (xRx), antisymétrique (xRy et $yRx \Rightarrow x=y$) et transitive (xRy et $yRz \Rightarrow xRz$) ; on dit alors que (E, \mathcal{R}) est un ensemble ordonné.
- On dit d'une relation d'ordre R que c'est une relation d'ordre total si :

$$\forall (x, y) \in E^2, xRy \text{ ou } yRx.$$
- Soient (E, \leq) un ensemble ordonné et $A \subset E$:
 - i) On dit que $m \in E$ est un **majorant** (resp. **minorant**) de A si :

$$\forall x \in A \quad m \geq x \quad (\text{resp. } \forall x \in A \quad m \leq x).$$
 - ii) On dit que $m \in A$ est le **plus grand élément** (resp. le **plus petit élément**) de A , on le note **max A** (resp. **min A**) si : $\forall x \in A \quad m \geq x$ (resp. $\forall x \in A \quad m \leq x$).
 - iii) On dit que A est **majorée** (resp. **minorée**) si il existe au moins un majorant (resp. minorant) de A dans E .
 - iv) On dit que A est **bornée** si elle est majorée et minorée.
 - v) On appelle **borne supérieure** (respectivement **borne inférieure**) de A , le plus petit des majorants (respectivement le plus grand des minorants) de A lorsqu'il existe; on le note **sup A** (respectivement **inf A**).

b) Existence et unicité de \mathbb{R}

On admet l'existence et l'unicité du "corps" commutatif \mathbb{R} muni de la relation d'ordre totale sous-jacente et le théorème suivant :

Théorème : Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de \mathbb{R} admet une borne supérieure (resp. inférieure) dans \mathbb{R} .

Proposition : Soit A une partie non vide et majorée de \mathbb{R} et $M \in \mathbb{R}$.

$$M = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} M \text{ majorant de } A \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A / M - \varepsilon < x \leq M \end{cases}$$

$$\text{De même si } A \text{ est minorée : } m = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} m \text{ minorant de } A \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A / m \leq x < m + \varepsilon \end{cases}$$

c) **Intervalles** : dans \mathbb{R} on définit 9 types d'intervalles :

- $[a,b] = \{ x \in \mathbb{R} , a \leq x \leq b \}$ intervalle fermé borné ou segment
- $]a,b[= \{ x \in \mathbb{R} , a < x < b \}$ intervalle semi ouvert à gauche, idem pour $]a,b[$
- $]a,b[= \{ x \in \mathbb{R} , a < x < b \}$ intervalle ouvert
- $[a, +\infty[= \{ x \in \mathbb{R} , x \geq a \}$, idem pour $]a, +\infty[$
- $] -\infty, b] = \{ x \in \mathbb{R} , x \leq b \}$, idem pour $] -\infty, b[$
- $] -\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

Remarque : On note $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, $\mathbb{R}_- =]-\infty, 0]$, $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ et $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{ -\infty, +\infty \}$ appelée droite numérique achevée.

d) **Propriétés élémentaires de \mathbb{R}**

- $\forall (a, b, x, y) \in \mathbb{R}^4, ((a \leq b \text{ et } x \leq y) \Rightarrow a + x \leq b + y)$.
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall a \in \mathbb{R}_+ (x \leq y) \Rightarrow a x \leq a y)$.
- $\forall (x, y, a, b) \in \mathbb{R}_+^4 (a \leq b \text{ et } x \leq y) \Rightarrow a x \leq b y)$.

II. Valeur absolue

a) **Notion de valeur absolue**

Définition : On appelle *valeur absolue* d'un réel x , le réel, noté $|x|$, défini par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Propriétés : Pour tous réels x et y , on a :

- 1- $|x| = \sup(x, -x)$, $|x| \geq x$ et $|x| \geq -x$.
- 2- $|x| \geq 0$
- 3- $\sqrt{x^2} = |x|$.
- 4- $|x| = |-x|$.
- 5- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- 6- $|xy| = |x| |y|$.
- 7- $\left| \frac{1}{x} \right| = \frac{1}{|x|}$ ($x \neq 0$).
- 8- $|x + y| \leq |x| + |y|$ (Inégalité triangulaire).
- 9- $||x| - |y|| \leq |x - y|$.
- 10- $\sup\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$.
- 11- $\inf\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$.

Théorème : (Inégalité de Cauchy - Schwarz)

$$\text{Pour tous réels } x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n : \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \right) \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2} \right)$$

b) Distance usuelle

Définition : L'application d de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ vers \mathbb{R} définie par :

$$d(x, y) = |x - y|, \text{ est appelée } \mathbf{distance\ usuelle} \text{ dans } \mathbb{R}.$$

Proposition : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

1- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

2- $d(x, y) = d(y, x)$.

3- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Inégalité triangulaire).

4- $|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z)$.

III. Partie entière

Théorème :

$$\mathbb{R} \text{ est un corps archimédien : } \forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} / n > x$$

Théorème - Définition :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists ! n \in \mathbb{Z}, n \leq x < n + 1.$$

n est appelé *partie entière* de x et on note $n = E(x)$ ou $n = [x]$.

Proposition :

- $\forall x \in \mathbb{R}, E(x) = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{Z}, E(x + p) = E(x) + p$.

IV. Densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R}

Théorème - Définition :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x < y, \exists r \in \mathbb{Q} / x < r < y.$$

On dit que \mathbb{Q} est *dense* dans \mathbb{R} .

Remarque : on a de même $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ dense dans \mathbb{R}

$$\text{i.e. } \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x < y, \exists r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} / x < r < y.$$