

AN. 3
Equations différentielles linéaire
(1^{ère} étude)

Dans ce chapitre \mathbf{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

I. EQUATION DIFFERENTIELLE LINEAIRE du 1^{ère} ORDRE

a) Définitions

Définitions :

- L'équation différentielle : (L) : $a(x)y' + b(x)y = c(x)$ où a , b et c sont des fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbf{K} , est appelée **équation différentielle linéaire du premier ordre**.
- On appelle **solution** de (L) sur un intervalle I de \mathbb{R} toute fonction ϕ de \mathbf{K}^I dérivable sur I telle que : $\forall x \in I, a(x)\phi'(x) + b(x)\phi(x) = c(x)$.

Remarques :

- On notera S_L l'ensemble des solutions de (L).
- Dans le cas particulier où $c = 0$, (H) : $a(x)y' + b(x)y = 0$, est appelée **équation homogène**.

b) Structure des solutions

Théorème 1 : Soit l'équation homogène (H) : $a(x)y' + b(x)y = 0$ et I un intervalle où la fonction a ne s'annule pas, alors l'ensemble des solutions de (H) est :

$$S_H = \left\{ \phi : I \rightarrow \mathbf{K}, \phi(x) = Ce^A \text{ où } A \text{ est une primitive de } -\frac{b}{a} \text{ et } C \in \mathbf{K} \right\}$$

Théorème 2 : La solution générale de l'équation différentielle linéaire

$$(L) : a(x)y' + b(x)y = c(x)$$

est la somme d'une solution particulière de (L) et de la solution générale de (H)

c) Recherche de solutions particulières de (L) : $a(x)y' + b(x)y = c(x)$

- **Méthode de la variation de la constante :** Soit h une solution de l'équation homogène associée. On cherche une solution de (L) sous la forme $f = z h$ où z est une fonction dérivable sur I .
- **Superposition des solutions :**

Proposition 1 : Lorsque $c(x) = \sum_{k=1}^n c_k(x)$, on cherche une solution f_k de :

$$a(x)y' + b(x)y = c_k(x), \text{ une solution particulière de (L) est alors } f = \sum_{k=1}^n f_k$$

d) Conditions initiales

Proposition 2 : $x_0 \in I, y_0 \in \mathbf{K}$ donnés, l'équation (L) : $a(x)y' + b(x)y = c(x)$ admet une unique solution prenant la valeur y_0 en x_0

II. Equations linéaires du 2nd ordre (à coefficients constants)

Définition : Soient $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et c une fonction continue de I vers \mathbb{K} .

On appelle solution de l'équation (L) : $y'' + ay' + by = c(x)$ toute fonction $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ deux fois dérivable sur I , telle que pour tout x de I : $f''(x) + af'(x) + bf(x) = c(x)$.

a) Structure des solutions

Théorème 1 :

La solution générale de l'équation différentielle linéaire (L) : $y'' + ay' + by = c(x)$ est la somme d'une solution particulière de (L) et de la solution générale de (H) $y'' + ay' + by = 0$.

Définition : L'équation $r^2 + ar + b = 0$ est appelée **équation caractéristique** de (H).

Théorème 2 : Soient a et b complexes. Résolution dans \mathbb{C} de (H) : $y'' + ay' + by = 0$:

- si l'équation caractéristique admet 2 solutions distinctes r et s alors

$$S_H = \{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, f(x) = Ae^{rx} + Be^{sx}, (A, B) \in \mathbb{C}^2 \}$$

- si l'équation caractéristique admet 1 solution double r alors

$$S_H = \{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, f(x) = (Ax + B)e^{rx}, (A, B) \in \mathbb{C}^2 \}$$

Théorème 3 : Soient a et b réels. Résolution dans \mathbb{R} de (H) : $y'' + ay' + by = 0$:

- si l'équation caractéristique a des solutions réelles, on retrouve les solutions précédentes avec A, B réels

- si l'équation caractéristique a des solutions non réelles $r = \alpha + i\beta$ et $s = \alpha - i\beta$ alors les solutions dans \mathbb{R} sont les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$$f(x) = e^{\alpha x} (A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x)) \text{ avec } A, B \text{ réels.}$$

b) Recherche de solutions particulières de (L) : $a(x)y' + b(x)y = c(x)$

1) Cas $c(x) = P(x)$ où P est un polynôme de degré n

Proposition 1 : Soit (L) : $y'' + ay' + by = P(x)$. P polynôme de degré n

- si $b \neq 0$ (L) admet pour solution un polynôme de degré n

- si $b = 0$ et $a \neq 0$ (L) admet pour solution un polynôme de degré $n + 1$

- si $b = a = 0$ (L) admet pour solution un polynôme de degré $n + 2$

2) Cas $c(x) = e^{mx}P(x)$

Proposition 2 : Soit (L) : $y'' + ay' + by = e^{mx}P(x)$ avec $m \in \mathbb{C}$ et P polynôme de degré n .

- si m n'est pas solution de l'équation caractéristique, (L) admet une solution f telle que

$$f(x) = e^{mx}Q(x) \text{ avec } Q \text{ polynôme de degré } n$$

- si m est racine simple de l'équation caractéristique, (L) admet une solution f telle que

$$f(x) = e^{mx}Q(x) \text{ avec } Q \text{ polynôme de degré } n + 1$$

- si m est racine double de l'équation caractéristique, toutes les solutions de (L) sont les fonctions f telles que $f(x) = e^{mx}Q(x)$ avec Q polynôme de degré $n + 2$

Remarque : On peut aussi poser $y = z e^{mx}$ et se ramener au cas précédent

c) Equation avec conditions initiales

Proposition : Soient $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{K}$ et $z_0 \in \mathbb{K}$ donnés. L'équation $y'' + ay' + by = e^{mx}P(x)$ admet une solution unique f vérifiant : $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = z_0$.