

AN 2

FONCTIONS HYPERBOLIQUES

I. FONCTIONS HYPERBOLIQUES DIRECTES

1.1 Définitions, dérivées, représentations graphiques

Définitions :

- On appelle fonction **sinus hyperbolique** l'application de \mathbb{R} vers \mathbb{R} (notée **sh**) telle que pour tout réel x :
$$\operatorname{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$
- On appelle fonction **cosinus hyperbolique** l'application de \mathbb{R} vers \mathbb{R} (notée **ch**) telle que pour tout réel x :
$$\operatorname{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$
- On appelle fonction **tangente hyperbolique** l'application de \mathbb{R} vers \mathbb{R} (notée **th**) telle que pour tout réel x :
$$\operatorname{th}x = \frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

Remarques : $\operatorname{sh}(ix) = i \cdot \sin x$ et $\operatorname{ch}(ix) = \cos x$.

Proposition 1 : Les fonctions sh, ch, th sont dérivables sur \mathbb{R} et :

$$\operatorname{sh}' = \operatorname{ch} \quad \operatorname{ch}' = \operatorname{sh} \quad \operatorname{th}' = 1 - \operatorname{th}^2 = 1/\operatorname{ch}^2$$

Remarques :

- Les fonctions sh et th sont impaires ; ch est paire.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}x > 0$.
- $\operatorname{sh}(0) = 0$
- $\operatorname{ch}(0) = 1$
- $\operatorname{sh}'(0) = 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}x}{x}$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{th}x}{x} = 1$

1.2 Trigonométrie hyperbolique

Proposition 2 :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch}x + \operatorname{sh}x = e^x \quad \operatorname{ch}x - \operatorname{sh}x = e^{-x}$$

$$\operatorname{ch}^2x - \operatorname{sh}^2x = 1$$

Proposition 3 : pour tous réels a et b :

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(a+b) &= \operatorname{ch}a \operatorname{ch}b + \operatorname{sh}a \operatorname{sh}b \\ \operatorname{ch}(a-b) &= \operatorname{ch}a \operatorname{ch}b - \operatorname{sh}a \operatorname{sh}b \\ \operatorname{sh}(a+b) &= \operatorname{sh}a \operatorname{ch}b + \operatorname{ch}a \operatorname{sh}b \\ \operatorname{sh}(a-b) &= \operatorname{sh}a \operatorname{ch}b - \operatorname{ch}a \operatorname{sh}b \\ \operatorname{ch}2a &= \operatorname{ch}^2a + \operatorname{sh}^2a = 2\operatorname{ch}^2a - 1 = 1 + 2\operatorname{sh}^2a \end{aligned}$$

$$\operatorname{sh} 2a = 2 \operatorname{sh} a \operatorname{ch} a$$

Proposition 4 : pour tous réels a et b : $\operatorname{th}(a + b) = \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 + \operatorname{th} a \operatorname{th} b}$

Proposition 5 : en posant $t = \operatorname{th}(x/2)$:

$$\operatorname{sh} x = \frac{2t}{1-t^2} \quad \operatorname{ch} x = \frac{1+t^2}{1-t^2} \quad \operatorname{th} x = \frac{2t}{1+t^2}$$

II. FONCTIONS HYPERBOLIQUES RECIPROQUES

2.1 Fonction Argsh

Théorème-définition : sh admet une bijection réciproque continue, strictement croissante de \mathbb{R} vers \mathbb{R} notée **Argsh** et pour tout réel x :

$$\operatorname{Argsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

Proposition 6 : Argsh est dérivable sur \mathbb{R} et $\operatorname{Argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

2.2 Fonction Argch

Théorème-définition : ch admet une application réciproque continue strictement croissante de $]1, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$ notée **Argch** et pour tout x de $]1, +\infty[$:

$$\operatorname{Argch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

Proposition 7 : Argch est dérivable sur $]1, +\infty[$ et pour tout x de $]1, +\infty[$

$$\operatorname{Argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

2.3 Fonction Argth

Théorème définition : th admet une application réciproque continue, strictement croissante de $] -1, 1 [$ sur \mathbb{R} notée **Argth** et pour tout x de $] -1, 1 [$

$$\operatorname{Argth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

Proposition 8 : Argth est dérivable sur $] -1, 1 [$ et pour tout x de $] -1, 1 [$

$$\operatorname{Argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$$