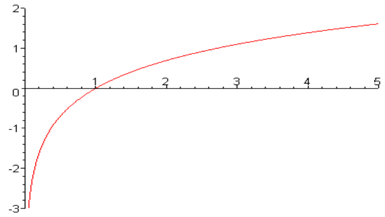
AN 1
FONCTIONS USUELLES et RECIPROQUES

1. Fonctions Logarithmes, Exponentielles, Puissances *(rappels)*

1.1 Logarithme népérien

Définition : on appelle logarithme népérien et on note ln la primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1 : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt$



Propriétés :

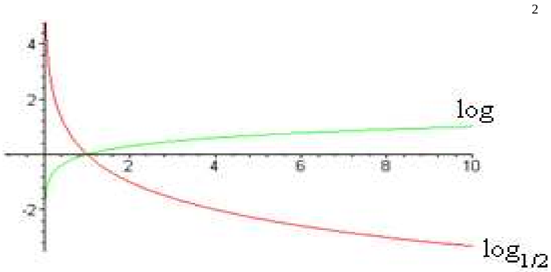
- la fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$
- u étant une fonction dérivable sur un intervalle I, ne s'annulant pas sur I,
  ln|u| est dérivable sur I et $\boxed{(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}}$
- ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$
- $\boxed{\forall a,b \in \mathbb{R}_+^*\ ,\ \ln(ab) = \ln a + \ln b}$
- $x > 0$, $y > 0$, $\ln\frac{1}{x} = -\ln x$, $\ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y$
- $n \in \mathbb{Z}$, $\ln x^n = n \ln x$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

1.2 Logarithme de base a

Définition : Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. On appelle logarithme de base a et on note $\log_a$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$.

Remarque : On note $\log x = \log_{10}(x)$ et on a : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\log(10^n) = n$.

Exemple : représentation graphique de $x \mapsto \log(x)$ et $x \mapsto \log_{\frac{1}{2}}(x)$

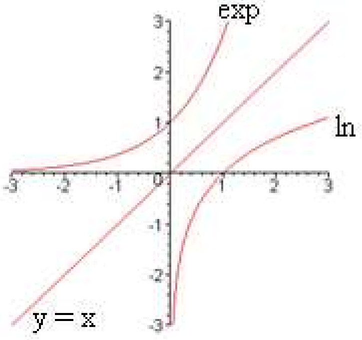


1.3 Exponentielle de base e

Définition :

La fonction ln est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$ donc établit une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$ et admet une bijection réciproque définie de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ appelée ***fonction exponentielle*** et notée ***exp*** :

$$\begin{cases} y = \exp(x) \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln(y) \\ y \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$



Remarque :

En notant e le réel exp(1) on obtient : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\exp(n) = e^n$ ($e \cong 2,718$).
Par convention on note alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = e^x$.
exp est appelée fonction exponentielle de base e.

Propriétés :

- $e^x > 0$.
- $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $e^{x+y} = e^x e^y$.
- $\forall x,y \in \mathbb{R}$, $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$, $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$, $e^{nx} = (e^x)^n$.
- exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ $\exp'(x) = e^x$.
- exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

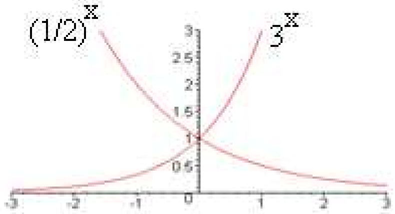
1.4 Exponentielle de base a

Définition : Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. On appelle exponentielle de base a et on note $\exp_a$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$ $\exp_a(x) = e^{x \ln a} = a^x$.

Remarques :

- Les propriétés de $\exp_a$ se déduisent de celles de exp , en particulier :
  i) $\exp_a$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp_a'(x) = \ln a \, e^{x \ln a} = \ln a \, . \, a^x$
  ii) si $a > 1$ alors $\exp_a$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
  iii) si $0 < a < 1$ alors $\exp_a$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$
- $\exp_a$ est la bijection réciproque de $\log_a$
- On retrouve les règles usuelles des exposants entiers : $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $a^{x+y} = a^x a^y$, etc…

Exemple : représentation graphique de $x \mapsto 3^x$ et $x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$



1.5 Fonctions puissances, racines n$^{\text{ièmes}}$

i) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, soit f_α la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$

Propriétés :

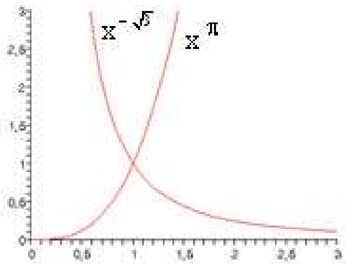
f_α est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_\alpha\,'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

- pour $\alpha > 0$ f_α est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$
- pour $\alpha = 0$ f_α est constante
- pour $\alpha < 0$ f_α est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

Remarques :

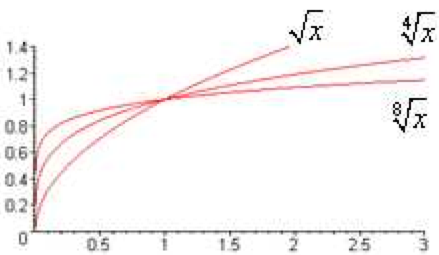
- Pour $\alpha > 0$ f_α peut être prolongée par continuité en 0 en posant $f_\alpha(0) = 0$.
- Si $\alpha \in \mathbb{N}$, alors f_α est définie sur $\mathbb{R}$ (si $\alpha \in \mathbb{Z}^-$ alors f_α est définie sur $\mathbb{R}^*$)

courbes représentatives de $x \mapsto x^\pi$ *et* $x \mapsto x^{-\sqrt{3}}$:



ii) fonctions racines n$^{\text{ièmes}}$: $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x^n$ établit une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$ et admet donc une bijection réciproque appelée racine n$^{\text{ième}}$ notée $x \mapsto \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ définie de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$: $\begin{cases} y = \sqrt[n]{x} \\ x \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y^n \\ y \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$

Remarque : pour n impair $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est définie sur $\mathbb{R}$.



1.6 Croissances comparées

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0} \qquad \boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty}$$

on en déduit :

$\alpha > 0, \beta > 0,\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0 \qquad \lim_{x\to 0} x^\beta |\ln x|^\alpha = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} x^\beta e^{-\alpha x} = 0$

2. FONCTIONS CIRCULAIRES *(rappels)*

2.1 Fonctions sinus, cosinus

Définition :

Soient $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct du plan orienté usuel et C le cercle de centre O et de rayon 1. Soient M un point de C et $x \in \mathbb{R}$ tels que $x = (\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ en radians. On appelle **cosinus** du réel x l'abscisse de M dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et **sinus** de ce réel l'ordonnée de M.
On définit ainsi deux fonctions 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$ notées cos et sin**.**

Propriétés :

- $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$
- Les fonctions sin et cos sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin'(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$ et $\cos'(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$.
- La fonction sinus est impaire et la fonction cosinus est paire.

2.2 Fonction tangente

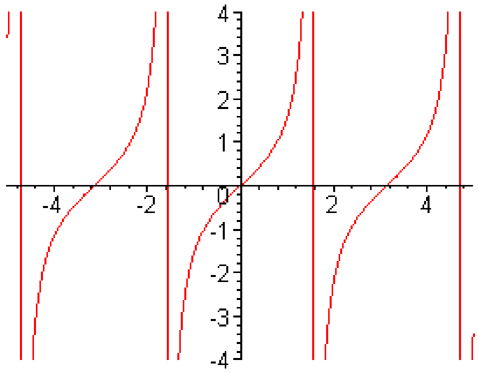
Définition :

La fonction **tangente** est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ par $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

Propriétés :

- tan est impaire, π-périodique.
- tan est continue et dérivable sur tout intervalle où elle est définie.
- $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ $\tan'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Représentation graphique :



3. FONCTIONS CIRCULAIRES RECIPROQUES

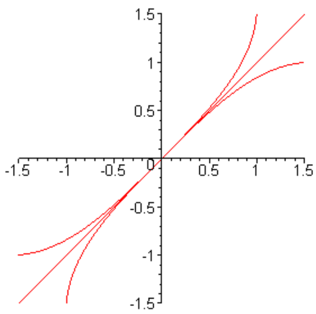
3.1 Fonction Arcsinus La fonction **sinus** est continue et strictement croissante de I= $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur [-1,1]. Elle admet donc une bijection réciproque de [-1.1] sur I continue et strictement croissante notée **Arcsinus** :

$$\begin{cases} y = \text{Arcsin } x \\ x \in [-1.1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sin y \\ y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

Remarques :

- $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ Arcsin(sin x) = x et $\forall x \in [-1.1]$ sin(Arcsin x) = x
- La fonction Arcsinus est impaire
- $\forall x \in [-1.1]$ $\cos(\text{Arcsin } x) = \sqrt{1 - x^2}$

Courbes représentatives de Arcsin (et sin sur [- π/2, π/2]) :



Propriété : la fonction Arcsinus est dérivable sur]-1.1[et

$$\forall x \in]-1,1[\ (\text{Arcsin})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

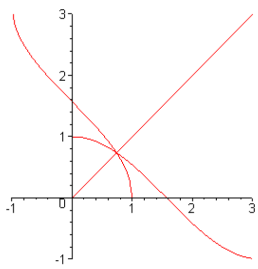
Remarque : On en déduit que $\lim_{x \to 0} \frac{\text{Arc}\sin x}{x} = 1$

3.2 Fonction Arccosinus

La fonction **cosinus** est continue et strictement décroissante de [0,π] sur [-1,1]. Elle admet une bijection réciproque de [-1.1] sur [0,π] continue et strictement décroissante notée **Arccosinus** :

$$\begin{cases} y = \text{Arccos } x \\ x \in [-1.1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos y \\ y \in [0, \pi] \end{cases}$$

Courbes représentatives de Arccos (et cos sur [0, π]) :



Remarque: $\forall x \in [-1.1]$ $\sin(\text{Arccos } x) = \sqrt{1-x^2}$

Propriété :

- La fonction Arccosinus est dérivable sur]-1,1[et :$(\text{Arccos})'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\forall x \in [-1,1]$, $\text{Arcsin } x + \text{Arccos } x = \dfrac{\pi}{2}$

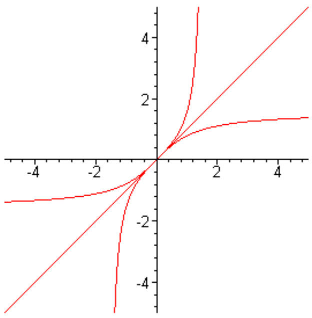
3.3 Fonction Arctangente

La fonction tangente est continue et strictement croissante de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$.

Elle admet donc une bijection réciproque de $\mathbb{R}$ sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ continue et strictement croissante appelée **Arctangente :**

$$\begin{cases} y = \text{Arctan } x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \tan y \\ y \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\end{cases}$$

Courbes représentatives de Arctan (et tan sur$]-\pi/2,\pi/2[$)



Remarques :

- La fonction Arctan est impaire.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\tan(\text{Arctan } x) = x$ et $\forall x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, $\text{Arctan}(\tan x) = x$

Propriété : la fonction Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $(\text{Arctan})'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

Remarque : On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{Arc}\tan x}{x} = 1$

Propriété : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\text{Arctan } x + \text{Arctan } \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$ si $x > 0$

et $\text{Arctan } x + \text{Arctan } \dfrac{1}{x} = -\dfrac{\pi}{2}$ si $x < 0$