ESPACES VECTORIELS EUCLIDIENS

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n ($1 \le n \le 3$).

1. PRODUIT SCALAIRE

Définitions :

- Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$:
  On dit que φ est **bilinéaire** si $\forall u \in E$, $\forall v \in F$, $\varphi(\,.\,,v)$ et $\varphi(u,\,.\,)$ sont linéaires
  avec $\varphi(.,v) : E \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \varphi(x,v)$ $\qquad$ $\varphi(u,.) : E \to \mathbb{R}$, $y \mapsto \varphi(u,y)$
  On dit que φ est **symétrique** si $\forall (x,y) \in E^2$, $\varphi(y,x) = \varphi(x,y)$.
  On dit que φ est **définie-positive** si $\forall x \in E$, $\varphi(x,x) \ge 0$ et $\varphi(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$.
- On appelle **produit scalaire** sur E toute forme bilinéaire symétrique définie-positive.
- On appelle **espace préhilbertien** réel un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire.
- On appelle **espace vectoriel euclidien** un espace préhilbertien de dimension finie.

Notations :

- On note souvent pour un produit scalaire $(x|y)$ ou $x.y$ pour $\varphi(x,y)$.
- De même on notera $\| x \|$ pour $\sqrt{(x|x)}$.

Remarque : Soient $x = (x_1,x_2)$ et $y = (y_1,y_2)$ éléments de $\mathbb{R}^2$.
$\varphi : (x,y) \mapsto x_1y_1 + x_2y_2$ est le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^2$.
On dit que $\mathbb{R}^2$ est ainsi muni de sa structure euclidienne canonique (de même pour $\mathbb{R}^n$).

Propriétés : Soit E un espace vectoriel euclidien :

1 * $\| x + y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2 + 2(x|y)$

2 * $\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2(\| x \|^2 + \| y \|^2)$

3 * $(x|y) = \frac{1}{4}(\| x + y \|^2 - \| x - y \|^2)$

4 * $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$

5 * $\lambda \in \mathbb{R}$, $\| \lambda x \| = |\lambda|\, \| x \|$

6 * $|(x|y)| \le \| x \|\, \| y \|$ (inégalité de Cauchy-Schwarz)

7 * $\| x + y \| \le \| x \| + \| y \|$ (inégalité de Minkowski)

Propriété : Soit E un espace vectoriel euclidien.
L'application N, définie de E dans $\mathbb{R}$ par : $N(x) = \| x \| = \sqrt{(x|x)}$, est une norme sur E.

Définition : Soit (E, φ) un espace vectoriel euclidien.

- L'application de $E \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \| x \|$ est appelée norme euclidienne associée au produit scalaire φ.
- Un vecteur x de E est dit normé ou unitaire lorsque $\| x \| = 1$.
- $(x, y) \in E^2$, on appelle distance de x à y associée à φ, le réel $d(x, y) = \| x - y \|$.
- F sev de E, $x \in E$, on appelle distance de x à F le réel $d(x, F) = \inf\{\| x - y \| \,/\, y \in F\}$.

2. ORTHOGONALITE

Soit (E, φ) un espace vectoriel euclidien.

Définitions :

- On dit que deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux lorsque $(x|y) = 0$.
- Soit $u \in E$. On appelle **orthogonal de u** l'ensemble $u^{\perp} = \{ v \in E \,/\, (u|v) = 0 \}$.
- Soit $A \subset E$. On appelle **orthogonal de A** l'ensemble $A^{\perp} = \{ v \in E \,/\, \forall a \in A, (a|v) = 0 \}$.
- 2 parties A et B de E sont dites orthogonales lorsque $\forall (x, y) \in A \times B$, $(x|y) = 0$.

Remarque : 0_E est orthogonal à tout $x \in E$.

Propriétés :

1 * $\forall x \in E$, $x^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E.
2 * $\varnothing^{\perp} = E$.
3 * $A \subset B \Rightarrow B^{\perp} \subset A^{\perp}$.
4 * $\forall A \subset E$, $A^{\perp}$ sous-espace vectoriel de E et $A^{\perp} = (\mathrm{Vect}(A))^{\perp}$.
5 * $\forall A \subset E \,/\, 0_E \in A$, $A \cap A^{\perp} = \{0_E\}$.

Théorème : Soit E un espace vectoriel euclidien. Pour tout sous-espace vectoriel F de E, on a : $(F^{\perp})^{\perp} = F$ et $E = F \oplus F^{\perp}$.

Définition :

Soit F sous-espace vectoriel de E. $F^{\perp}$ est appelé le **supplémentaire orthogonal** de F.

Exemple : Si $x \in E \,/\, x \neq 0_E$, alors : $\mathrm{Vect}(x) \oplus x^{\perp} = E$.

Remarques :

- Si $\dim E = 2$, l'orthogonal d'une droite est une droite.
- Si $\dim E = 3$, l'orthogonal d'une droite est un plan et l'orthogonal d'un plan est une droite.

Définition : Soit $I = \{1, \cdots, n\}$.

- $(x_i)_{i \in I}$ est dite **famille orthogonale** lorsque $\forall (i,j) \in I^2$, $i \neq j \Rightarrow (x_i|x_j) = 0$.
- $(x_i)_{i \in I}$ est dite **famille orthonormale** lorsque $\forall (i,j) \in I^2$, $(x_i|x_j) = \delta_{ij}$.

Propriétés : Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

Théorème : Pythagore

$\| x + y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2 \iff (x|y) = 0$.

Propriété : Tout espace euclidien admet une base orthonormale.

Remarques :

- La structure euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$ est celle pour laquelle la base canonique $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est orthonormale. On a alors : $\forall (x,y) \in E^2$ / $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$

$$(x|y) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n \quad \text{et} \quad \| x \| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

- En notant X et Y les matrices de x et y dans $\mathcal{B}$ on a : $(x|y) = {}^tXY$ et $\| x \|^2 = {}^tXX$.

Application : Soient $\mathcal{B} = (e_1,e_2,e_3)$ une B.O.N. de E et $D = \text{Vect}(\vec{u})$ où $\vec{u}(a, b, c) \in E \setminus \{\vec{0}\}$.
Alors $D^{\perp}$ est le plan P : $ax + by + cz = 0$.

Définition : Soient E un espace vectoriel euclidien et un F sous-espace vectoriel de E.

- On appelle **projection orthogonale** sur F la projection p_F sur F de direction $F^{\perp}$.
- On appelle **symétrie orthogonale** par rapport à F la symétrie s_F par rapport à F de direction $F^{\perp}$.
- Une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan est appelée **réflexion**.

Propriétés : 1- Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$ une base **orthonormale** d'un sous-espace vectoriel F de E.

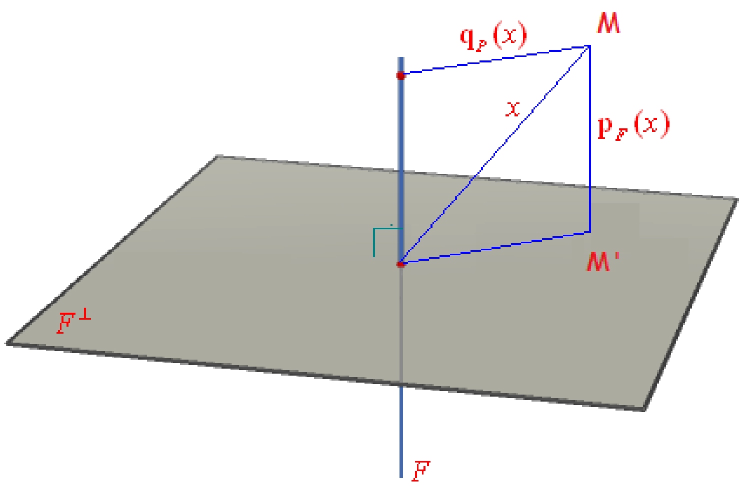
$$\forall x \in E,\ p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} (x|e_i)e_i.$$

2- Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille libre. Il existe une famille orthogonale $(y_i)_{i \in I}$ telle que $\text{Vect}(x_i)_{i \in I} = \text{Vect}(y_i)_{i \in I}$

3- Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille libre. Il existe une unique famille orthonormale $(e_i)_{i \in I}$ telle que : $\forall i \in I$, $\text{Vect}(x_j)_{j<i} = \text{Vect}(e_j)_{j<i}$ et $(x_i|e_i) > 0$

Remarque : Soient $x \in E$, F sous-espace vectoriel de E et $q_F(x)$ projeté orthogonal de x sur $F^{\perp}$.

- $d(x,F) = \| x - p_F(x) \| = \| q_F(x) \|$
- $d^2(x,F) = \| q_F(x) \|^2 = \| x \|^2 - \sum_{i=1}^{p} |(x|e_i)|^2$ où $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$ une base **orthonormale** de F.



3. PRODUIT VECTORIEL

3.1 Produit mixte

Soit E espace vectoriel euclidien orienté de dimension n (n = 2 ou n = 3)

Définition : On appelle produit mixte de $(x_1,\cdots,x_n)\in E^n$, et on note $[x_1,\cdots,x_n]$, le réel :

$$[x_1,\cdots,x_n] = \det_{\mathcal{B}}(x_1,\cdots,x_n) \quad \text{où } \mathcal{B} \text{ b.o.n.d quelconque de E.}$$

Remarques :

- $[x_1,\cdots,x_n] = 0 \Leftrightarrow (x_1,\cdots,x_n)$ liée.
- $(x_1,\cdots,x_n)$ base directe de E $\Leftrightarrow$ $[x_1,\cdots,x_n] > 0$.

3.2 Produit vectoriel

Propriété : Pour toute forme linéaire f sur E, il existe $u\in E$ tel que $\forall x\in E$, $f(x) = (u|x)$.

Remarque : $(u, v)\in E^2$, $x \mapsto [u, v, x]$ est une forme linéaire.

Théorème-définition : $\forall (u, v)\in E^2$, $\exists!\ w\in E$, tel que $\forall x\in E$, $[u, v, x] = (w|x)$.

w associé au couple (u, v) est appelé **produit vectoriel** de u et v et noté $\mathbf{u \wedge v}$.

i.e. $\forall x\in E$, $[u, v, x] = (u \wedge v \mid x)$

Propriétés :

1* $\forall (u, v, w)\in E^3$, $(u \wedge v \mid w) = [u, v, w] = (v \wedge w \mid u) = (w \wedge u \mid v)$

2* l'application $(u, v) \mapsto u \wedge v$ est bilinéaire

3* $v \wedge u = - u \wedge v$

4* $u \wedge v \in (\mathrm{Vect}(u, v))^{\perp}$

5* $u \wedge v = 0_E \Leftrightarrow (u, v)$ liée

6* (u, v) libre $\Leftrightarrow$ $(u, v, u \wedge v)$ base directe

Remarque : on avait, en géométrie, défini le produit scalaire différemment. Ces définitions sont bien sûr équivalentes :

Propriété :

Si (u, v) libre alors $u \wedge v = \| u \|.\| v \|.\sin(u, v)k$ avec k vecteur unitaire de la demi-normale positive à P(u, v) (où (u, v, k) base directe de E)

Rappels : Dans une b.o.n.d (e_1, e_2, e_3) on a :

i) $e_1 \wedge e_2 = e_3$, $e_2 \wedge e_3 = e_1$ et $e_3 \wedge e_1 = e_2$

ii) Pour $u(x_1,x_2,x_3)$ et $v(y_1,y_2,y_3)$, $u \wedge v$ a pour coordonnées :

$$\left(\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

Propriété :

i) $\| u \wedge v \|^2 = \| u \|^2 . \| v \|^2 - (u|v)^2$ (identité de Lagrange)

ii) $(u \wedge v) \wedge w = (u|w)v - (v|w)u$ (double produit vectoriel)

4. ENDOMORPHISMES ORTHOGONAUX

Soit E espace vectoriel euclidien.

Théorème : Soit f une application de E dans E. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1 - f conserve le produit scalaire ($\forall (x,y) \in E^2$, $(f(x)|f(y)) = (x|y)$)

2 - $f \in \mathcal{L}(E)$ et f conserve la norme ($f \in \mathcal{L}(E)$ et $\forall x \in E$, $\| f(x) \| = \| x \|$)

Définition : On appelle **endomorphisme orthogonal** de E (ou **isométrie vectorielle**) toute application de E dans E qui conserve le produit scalaire.

Théorème : $f \in \mathcal{L}(E)$ est orthogonal si et seulement si sa matrice M, **dans une base orthonormale,** vérifie : ${}^tMM = I_n$.

Propriété :

1- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. f est un endomorphisme orthogonal de E si et seulement si l'image par f d'une base orthonormale est une base orthonormale.

2- Si f est un endomorphisme orthogonal, alors : $\det(f) = \pm 1$.

3- Tout endomorphisme orthogonal de E est un automorphisme de E.

Propriétés Définitions :

1- Soit $O(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E.
($O(E)$, o) est un groupe appelé **groupe orthogonal de E** (sous groupe de (Aut(E),o))

2- L'ensemble des endomorphismes orthogonaux f tels que det(f) = 1 est un sous groupe de ($O(E)$, o) noté $O^+(E)$, ses éléments sont appelés **rotations de E**.

Remarques :

- f symétrie orthogonale de E $\Leftrightarrow$ f endomorphisme orthogonal involutif de E.
- $O^-(E) = \{f \in O(E) \ / \ \det(f) = -1\}$ n'est pas un groupe.

5. MATRICES ORTHOGONALES

Soit E espace vectoriel euclidien.

Définition : Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On dit que M est **orthogonale** si ${}^tMM = I_n$.

Propriétés :

1- Si M est orthogonale alors $\det(M) = \pm 1$ et $M^{-1} = {}^tM$.

2- $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si ses vecteurs colonnes forment une b.o.n de $\mathbb{R}^n$.

3- $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si M est une matrice de changement de bases orthonormales.

4- L'ensemble $O_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un sous groupe de $(GL_n(\mathbb{R}), \cdot)$ appelé groupe orthogonal d'ordre n.

6. ENDOMORPHISMES ORTHOGONAUX en dimension 1 ou 2

E espace vectoriel euclidien orienté, $\mathcal{B}$ b.o.n.d, dim(E) = 1 ou dim(E) = 2.

6.1 dimE = 1 $O(E) = \{ Id_E, - Id_E \}$

6.2 dimE = 2 $M = \begin{pmatrix} a & d \\ b & c \end{pmatrix}$ / $M \in O(E) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=1 \\ c^2+d^2=1 \\ ad+bc=0 \end{cases}$

on obtient : $M \in O(E) \Leftrightarrow \exists \theta \in [0,2\pi[$ / $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ou $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

Ensemble $O^+(E)$:

On note $O_2^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

et $O^+(E) = \{f \in O(E) / \det(f) = 1\}$.

$f \in O^+(E)$ si et seulement si $\exists \theta \in [0,2\pi[$ tel que $\mathrm{Mat}(f) = R_\theta$ dans toute b.o.n.d.

Détermination de θ : Soient $f \in O^+(E)$ et $u(\cos\alpha, \sin\alpha)$ (ie u vecteur unitaire).

On a alors : $\cos\theta = (u|f(u))$ et $\sin\theta = \det(u, f(u))$

On trouve ainsi l'angle de la rotation à partir d'un vecteur unitaire quelconque.

Propriétés :
- $(O_2^+(\mathbb{R}), \circ)$ est un groupe.
- $R_\theta \circ R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'}$.
- $R_\theta^{-1} = R_{-\theta} = {}^tR_\theta$.

Ensemble $O^-(E)$:

On note $O_2^-(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

et $O^-(E) = \{f \in O(E) / \det(f) = -1\}$.

Alors :
- $f \in O^-(E) \Leftrightarrow \exists \theta \in [0,2\pi[$ tel que $\mathrm{Mat}(f) = S_\theta$ dans une b.o.n.d.
- f est une réflexion par rapport à D(u) avec $u(\cos\theta/2 , \sin\theta/2)$.

Propriétés :
- $S_\theta^2 = Id_E$
- $(S_\theta)^{-1} = S_\theta$
- ${}^tS_\theta = S_\theta$
- $S_{\theta'} \circ S_\theta = R_{\theta'-\theta}$ (toute rotation est la composée de 2 réflexions)

7. ENDOMORPHISMES ORTHOGONAUX en dimension 3

Soient $f \in \mathcal{O}(E)$ et $F = \mathrm{Inv}(f) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$.

Alors $g = f|_{F^\perp} \in \mathcal{O}(F^\perp)$ avec $\mathrm{Inv}(g) = \{0_E\}$.

7.1 Classification des endo. orth. suivant la dimension de F

** Si dimF = 3 :* $F = E$ et $f = \mathrm{Id}_E$

** Si dimF = 2 :* $F = P$ $f = S_F$: réflexion par rapport au plan P

$D = F^\perp$, $g \in \mathcal{O}(D)$ et $g = -\mathrm{Id}_D$. Si $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ b.o.n. de E avec $(\vec{i}, \vec{j})$ base de F,

alors : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{diag}(1,1,-1)$. Donc $\det(f) = -1$ et $f \in \mathcal{O}^-(E)$

Propriété : Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de E distincts non nuls et de même norme, alors il existe une unique réflexion σ telle que $\sigma(\vec{u}) = \vec{v}$.

** Si dimF = 1 :* $F = D$

Définition :

- On appelle rotation vectorielle de E l'identité et toute isométrie vectorielle f de E telle que Inv(f) est une droite vectorielle D.
- On appelle rotation vectorielle d'axe $D(\vec{u})$ et d'angle θ la rotation laissant $\vec{u}$ invariant et telle que $g = f|_P$ avec $P = D^\perp$ soit la rotation d'angle θ dans P orienté par $\vec{u}$.

Remarques :

- $R(\vec{u}, 0) = \mathrm{Id}_E$.
- $R(\vec{u}, \pi) = S_D$ avec $D(\vec{u})$ appelé demi-tour ou retournement d'axe D.

On a donc ici : $f = R(\vec{k}, \theta)$ (rotation vectorielle d'axe F = D)

$P = D^\perp$, $g \in \mathcal{O}(P)$ et g est une rotation vectorielle de P

Si $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ b.o.n.d. de E avec $\vec{k} \in D$, $(\vec{i}, \vec{j})$ base de P orienté par $\vec{k}$, alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{où } \theta \text{ angle de g}$$

Donc $\det(f) = 1$: $f \in \mathcal{O}^+(E)$ et $\mathrm{tr}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) = 1 + 2\cos\theta$

Détermination de θ et de $\vec{u}$:

- $(\mathbb{R}\vec{u})$ = {invariants} = $\left\{\vec{v} = f\left(\vec{v}\right)\right\}$
- Si $f = R(\vec{u},\theta)$), alors : tr(Mat(f)) = 1 + 2cosθ
  et le signe de sin θ est celui de $[\vec{u},\vec{v},f(\vec{v})]$ où $\vec{v} \notin (\mathbb{R}\vec{u})$
- Si $f = R(\vec{u},\theta)$) et $(\vec{i},\vec{j})$ b.o.n.d. du plan $P = (\mathbb{R}\vec{u})^{\perp}$,
  alors : $\cos\theta = \vec{i}.f(\vec{i})$ et $\sin\theta = \vec{j}.f(\vec{i})$

** Si dimF = 0* il existe une réflexion σ par rapport à un plan $P = (\mathbb{R}\vec{u})^{\perp}$ et une rotation $r = R(\vec{u},\theta)$), telles que $f = \sigma \circ r$.

Si $\mathcal{B} = (\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ b.o.n.d. de E avec $\vec{k} = \dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$, $(\vec{i},\vec{j})$ base de P orienté par $\vec{k}$, alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ où θ angle de g. Donc det(f) = -1 et $f \in O^-(E)$

Détermination de θ et de $\vec{u}$:

- $(\mathbb{R}\vec{u})$ = {anti-invariants} = $\left\{\vec{v} = -f\left(\vec{v}\right)\right\}$
- Si $(\vec{i},\vec{j})$ b.o.n.d. du plan $P = (\mathbb{R}\vec{u})^{\perp}$, alors : $\cos\theta = \vec{i}.f(\vec{i})$ et $\sin\theta = \vec{j}.f(\vec{i})$

<u>7.2 Propriétés des endomorphismes orthogonaux en dimension 3</u>

Propriétés :

- $f \in O^+(E)$ si et seulement si f est une rotation vectorielle.
- $O^+(E)$ est un sous groupe de $(O(E), o)$ (la composée de 2 rotations est une rotation)

Propriétés :

- Si P et P' sont deux plans, alors $S_{P'} o S_P$ est une rotation vectorielle.
- Toute rotation vectorielle est la composée de 2 réflexions.
- Si $f \in O(E)$ / Inv(f) = $\{0_E\}$, alors il existe 3 plans P,P',P'' tels que $f = S_{P''} o S_{P'} o S_P$.

Conséquence : Les réflexions engendrent $O(E)$.