

**SYSTEMES LINEAIRES - DETERMINANTS d'ordre 2 et 3** $\mathbf{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .**1. SYSTEMES LINEAIRES****Définition :**On appelle **système linéaire** de  $n$  équations linéaires à  $p$  inconnues  $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbf{K}^n$ 

$$\text{le système (S) : } \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

où les coefficients  $a_{ij}$  et  $b_j$  ( $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p$ ) sont éléments de  $\mathbf{K}$ .**Remarques :**

- En notant  $A = (a_{ij})$ ,  $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$  et  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$  on obtient que  $X$  est solution de (S) dans

 $\mathbf{K}^p$  si et seulement si :

$AX = B$  : interprétation matricielle de (S).

- Soient  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = A$  et  $x \in E, b \in F$  tels que  $X$  (resp.  $B$ ) est la matrice colonne des coordonnées de  $x$  dans  $\mathcal{B}$  (resp.  $b$  dans  $\mathcal{B}'$ ) :

$AX = B \Leftrightarrow f(x) = b$  : interprétation vectorielle de (S).

**Définition :**

- Si  $B = 0$ , on dit que le système est **homogène** et on le note alors  $(S_0)$ .
- Le rang  $r$  de  $A$  est appelé **rang du système** (S).
- Résoudre le système (S), c'est chercher l'ensemble  $\mathcal{S}$  des  $p$ -uplets solutions.

**Définition :**Un système linéaire (S) est dit de **Cramer** si la matrice carrée  $A$  associée est inversible (ou  $f$  endomorphisme associé est un isomorphisme).**Proposition 1 :** un système de Cramer admet une solution unique :

$x = f^{-1}(b)$  ou encore  $X = A^{-1}B$

**Remarque :** Un système de Cramer homogène admet pour unique solution  $(0, \dots, 0) \in \mathbf{K}^p$ .**Proposition 2 :** Soit  $(S_0)$  un système homogène de  $n$  équations linéaires à  $p$  inconnues d'écriture matricielle  $AX = 0$  avec  $\text{rg}(A) = r$ .L'ensemble des solutions de  $(S_0)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{K}^p$  de dimension  **$p-r$** .**Remarque :**  $r \neq p$  si et seulement si  $(S_0)$  admet d'autres solutions que la solution  $(0, \dots, 0)$ .

## 2. DETERMINANTS D'ORDRE 2

### 2.1 Applications bilinéaires

#### Définition :

- Soient  $E, F, G$  3  $\mathbf{K}$ -espaces vectoriels et  $f : E \times F \rightarrow G$ . On considère alors les applications :  
 pour  $v \in F$ ,  $f(\cdot, v) : E \rightarrow G$   
 $x \mapsto f(x, v)$   
 pour  $u \in E$ ,  $f(u, \cdot) : F \rightarrow G$   
 $y \mapsto f(u, y)$
- On dit que  $f$  est **bilinéaire** si  $\forall u \in E, \forall v \in F, f(\cdot, v)$  et  $f(u, \cdot)$  sont linéaires.
- On note  $\mathcal{L}_2(E \times F, G)$  l'ensemble des applications bilinéaires de  $E \times F$  dans  $G$  et  $\mathcal{L}_2(E)$  l'ensemble des **formes bilinéaires** sur  $E$  c'est à dire des applications bilinéaires de  $E \times E$  dans  $\mathbf{K}$ .

**Définition :** Soit  $f$  une application de  $E^2$  dans  $F$ . On dit que :

- $f$  est **symétrique** si  $\forall (x, y) \in E^2, f(y, x) = f(x, y)$ .
- $f$  est **antisymétrique** si  $\forall (x, y) \in E^2, f(y, x) = -f(x, y)$ .
- $f$  est **alternée** si  $\forall x \in E, f(x, x) = 0$ .

**Proposition 3 :** Soit  $f$  une application bilinéaire de  $E^2$  dans  $F$ .  
 $f$  est alternée si et seulement si  $f$  est antisymétrique.

**Proposition 4 :** Soient  $(e_1, e_2)$  une base d'un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel  $E$ ,  $\varphi$  une application bilinéaire antisymétrique sur  $E$  et  $(u, v) \in E^2$  tels que  $u = x_1 e_1 + x_2 e_2$ ,  $v = y_1 e_1 + y_2 e_2$ .  
 On a alors :  $\varphi(u, v) = (x_1 y_2 - x_2 y_1) \varphi(e_1, e_2)$

**Conséquence :** Soient  $(e_1, e_2)$  une base d'un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel  $E$  et  $\alpha \in \mathbf{K}$ . Il existe une unique forme bilinéaire antisymétrique  $\varphi_\alpha$  sur  $E$  telle que  $\varphi_\alpha(e_1, e_2) = \alpha$ .

### 2.2 Déterminant

**Définition :** l'unique forme bilinéaire antisymétrique  $\varphi_1$  sur  $E$  telle que  $\varphi_1(e_1, e_2) = 1$  est appelée **déterminant** dans la base  $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$  et on note  $\varphi_1 = \det_{\mathcal{B}}$ .

#### Remarques :

- On a alors, pour  $(u, v)$  dans  $E^2$  :  $\varphi_1(u, v) = \det_{\mathcal{B}}(u, v) = x_1 y_2 - x_2 y_1$ .
- On note  $\det_{\mathcal{B}}(u, v) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$ .

**Proposition 5 :**  $\forall (u, v, w) \in E^3, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$  :

1.  $\det_{\mathcal{B}}(v, u) = -\det_{\mathcal{B}}(u, v)$
2.  $\det_{\mathcal{B}}(u, \lambda u) = 0$
3.  $\det_{\mathcal{B}}(\lambda u + \mu v, w) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(u, w) + \mu \det_{\mathcal{B}}(v, w)$
4.  $\det_{\mathcal{B}}(u, \lambda v + \mu w) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(u, v) + \mu \det_{\mathcal{B}}(u, w)$

**Proposition 6 :**  $\forall (u, v) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbf{K},$

1.  $\det_{\mathcal{B}}(u + \lambda v, v) = \det_{\mathcal{B}}(u, v)$
2.  $\det_{\mathcal{B}}(u, v + \lambda u) = \det_{\mathcal{B}}(u, v).$

### 3. DETERMINANTS D' ORDRE 3

#### 3.1 Formes trilinéaires

**Définitions :**

- Soient  $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel et  $f : E^3 \rightarrow \mathbf{K}$ . On considère alors les applications :  
pour  $(v, w) \in E^2$ ,  $f(\cdot, v, w) : E \rightarrow \mathbf{K}$   
 $x \mapsto f(x, v, w)$   
pour  $(u, w) \in E^2$ ,  $f(u, \cdot, w) : E \rightarrow \mathbf{K}$   
 $y \mapsto f(u, y, w)$   
pour  $(u, v) \in E^2$ ,  $f(u, v, \cdot) : E \rightarrow \mathbf{K}$   
 $z \mapsto f(u, v, z)$
- On dit que  $f$  est **trilinéaire** si :  $\forall (u, v, w) \in E^3$ ,  $f(\cdot, v, w)$ ,  $f(u, \cdot, w)$  et  $f(u, v, \cdot)$  sont trois applications linéaires.
- On note  $\mathcal{L}_3(E)$  l'ensemble des formes trilinéaires sur  $E^3$ .
- Soit  $f$  une application de  $E^3$  dans  $\mathbf{K}$ , on dit que :  
 $f$  est **antisymétrique** si  $\forall (u, v, w) \in E^3$ ,  $f(u, w, v) = f(v, u, w) = f(w, v, u) = -f(u, v, w)$   
 $f$  est **alternée** si  $f(u, v, w) = 0$  lorsque 2 des 3 vecteurs sont égaux.

**Proposition 7 :** Soit  $f$  une forme trilinéaire sur  $E$ .  
 $f$  alternée  $\Leftrightarrow f$  antisymétrique.

**Proposition 8 :** Soient  $(e_1, e_2, e_3)$  une base d'un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel  $E$ ,  $\varphi$  une application trilinéaire antisymétrique sur  $E$  et  $(u, v, w) \in E^3$  tels que  $u = \sum_{i=1}^3 x_i e_i$ ,  $v = \sum_{i=1}^3 y_i e_i$ ,  $w = \sum_{i=1}^3 z_i e_i$ .  
On a :  $\varphi(u, v, w) = [x_1(y_2 z_3 - y_3 z_2) + x_2(y_3 z_1 - y_1 z_3) + x_3(y_1 z_2 - y_2 z_1)] \varphi(e_1, e_2, e_3).$

**Conséquence :** Soient  $(e_1, e_2, e_3)$  une base d'un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel  $E$  et  $\alpha \in \mathbf{K}$ .  
Il existe une unique forme trilinéaire antisymétrique  $\varphi_\alpha$  sur  $E$  telle que  $\varphi_\alpha(e_1, e_2, e_3) = \alpha$ .

#### 3.2 Déterminant

**Définition :** l'unique forme trilinéaire antisymétrique  $\varphi_1$  sur  $E$  telle que  $\varphi_1(e_1, e_2, e_3) = 1$  est appelée **déterminant** dans la base  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  et on note  $\varphi_1 = \det_{\mathcal{B}}$ .

**Remarques:**

- $\varphi_1(u, v, w) = \det_{\mathcal{B}}(u, v, w) = x_1(y_2 z_3 - y_3 z_2) + x_2(y_3 z_1 - y_1 z_3) + x_3(y_1 z_2 - y_2 z_1)$

- On note  $\det_{\mathcal{B}}(u, v, w) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$

- $$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$
- On dit qu'on a développé le déterminant suivant la 1<sup>o</sup> colonne.
- Les déterminants d'ordre 2 obtenus en supprimant une ligne et une colonne sont appelés déterminants *mineurs*.
- On peut aussi développer un déterminant suivant une ligne ou une colonne, les coefficients des termes  $a_{ij}$  de la ligne ou de la colonne choisie sont les mineurs correspondants affectés du signe  $(-1)^{i+j}$  ( le mineur affecté de son signe est appelé cofacteur de  $a_{ij}$  ).
- Ces méthodes peuvent être généralisées pour le calcul des déterminants d'ordre n.

**Proposition 9 :**  $\forall (u,v,w) \in E^3, \forall (\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2 :$   
 $\det_{\mathcal{B}}(u,w,v) = \det_{\mathcal{B}}(v,u,w) = \det_{\mathcal{B}}(w,v,u) = - \det_{\mathcal{B}}(u,v,w)$   
 $\det_{\mathcal{B}}(v,w,u) = \det_{\mathcal{B}}(w,u,v) = \det_{\mathcal{B}}(u,v,w)$   
 $\det_{\mathcal{B}}(u,u,w) = \det_{\mathcal{B}}(u,v,v) = \det_{\mathcal{B}}(u,v,u) = 0$   
 $\det_{\mathcal{B}}(u,\lambda v + \mu v',w) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(u,v,w) + \mu \det_{\mathcal{B}}(u,v',w) \quad \forall v' \in E \quad \text{etc } \dots$

#### **4. DETERMINANT d'ENDOMORPHISME et de MATRICE CARREE**

Soient E un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n = 2$  ou  $3$  et  $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$  ou  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  une base de E.

##### **4.1 Changement de base**

**Proposition 10 :** Soient E un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension n et  $u_i \in E, 1 \leq i \leq n$ , alors  
 $U = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$  famille libre de E si et seulement si  $\det_{\mathcal{B}}(U) \neq 0$ .

**Remarques :** U liée  $\Leftrightarrow \det_{\mathcal{B}}(U) = 0$ . U base  $\Leftrightarrow$  U libre (dim. finie).

**Proposition 11 :** Soient  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  2 bases de E.  
 1.  $\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}} \cdot (\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}$   
 2.  $\det_{\mathcal{B}} \cdot (\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}} (\mathcal{B}') = 1$

##### **4.2 Déterminant d'un endomorphisme**

**théorème-définition :** Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Le scalaire  $\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}))$  est indépendant de la base  $\mathcal{B}$  de E .  
 Il est appelé déterminant de f et noté  $\det(f)$

**Proposition 12 :**  $f \in \mathcal{L}(E)$  est bijectif si et seulement si  $\det(f) \neq 0$

**Remarque :**  $\det(\text{Id}_E) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$ .

**Proposition 13 : composée d'endomorphismes**  
 $(f, g) \in (\mathcal{L}(E))^2, \det(\text{gof}) = \det(g)\det(f)$



**Proposition 17 :** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  inversible alors :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{com}(A).$$

Ex : pour  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  on obtient  $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

### 5.3 Vecteurs colinéaires ou coplanaires

**Proposition 18 :**

- Deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  du plan, muni d'une base  $\mathcal{B}$ , sont colinéaires si et seulement si on a :  $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ .
- Trois vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  de l'espace, muni d'une base  $\mathcal{B}$ , sont coplanaires si et seulement si on a :  $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$ .

**Remarque :** en géométrie affine, cela sert à déterminer des équations :

- de droites dans le plan :  $M \in D(A, \vec{u}) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$  pour  $\vec{u} \neq \vec{0}$
- de plans dans l'espace :  $M \in P(A, \vec{u}, \vec{v}) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$  pour  $(\vec{u}, \vec{v})$  non colinéaires

**5.4 Orientation** Soient  $n \in \{2, 3\}$  et  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ .

**Définition :** Soient  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  2 bases de  $E$ , on dit que :

- $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  sont de même sens si :  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$
- $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  sont de sens contraire si :  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') < 0$

**Remarque :** dans l'ensemble des bases de  $E$ , la relation  $\mathcal{R}$  définie par :

$\mathcal{B} \mathcal{R} \mathcal{B}'$  si et seulement si  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$   
est une relation d'équivalence ayant 2 classes d'équivalence.

**Définition :** On appelle orientation de  $E$  le choix d'une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  pour base directe.

Toute base de  $E$  de même sens que  $\mathcal{B}$  est dite directe, les autres sont dites indirectes.

**Remarque :** on convient que la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  est directe,  $\mathbb{R}^n$  est ainsi orienté.