Al. 11 MATRICES

K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1. CALCUL MATRICIEL

1.1 Définition, notations

Définition :

On appelle **matrice** à n lignes et p colonnes sur **K** , toute application

$$A : \{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,p\}\to \mathbf{K}$$
$$(i,j) \mapsto a_{ij}$$

on note :

$$A = (a_{ij})_{1\le i\le n,\, 1\le j\le p} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Remarques :

- L'ensemble de ces matrices est noté $\mathcal{M}_{np}(\mathbf{K})$.
- a_{ij} est le terme situé sur la $i^{\text{ème}}$ ligne et sur la $j^{\text{ème}}$ colonne.
- Si n = p on dit que A est une matrice carrée d'ordre n (ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$).
  Les a_{ii} ($1 \le i \le n$) sont appelés éléments diagonaux, et $(a_{11},\dots,a_{nn})$ la diagonale de A.
- Si p = 1 A est une matrice colonne.
- Si n = 1 A est une matrice ligne.
- On note 0_{np} ou 0 la matrice dont tous les éléments sont nuls.

1.2 Matrice d'une application linéaire

Définition : Soient E et F 2 **K**-ev de dimensions finies, p = dim(E), n = dim(F),

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ base de E , $\mathcal{B}' = (f_1,\dots,f_n)$ base de F, $f\in\mathcal{L}(E,F)$.

Pour $1 \le j \le p$, soit $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i$ (i.e. $(a_{1j}, \dots, a_{nj})$ composantes de $f(e_j)$ dans $\mathcal{B}'$).

On appelle **matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$** le tableau des composantes :

$$\begin{array}{c|ccccc} & f(e_1) & \cdots & f(e_j) & \cdots & f(e_n) \\ \hline \varepsilon_1 & a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_i & a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_p & a_{p1} & \cdots & a_{pj} & \cdots & a_{pn} \end{array}$$

i.e. la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ est la matrice définie par :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = (a_{ij})_{1\le i\le n,\, 1\le j\le p}.$$

Si F = E et $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ alors on note $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

Remarques :

- On note cette matrice : $\mathrm{Mat}_{(\mathcal{B},\mathcal{B}')}(f) = A = (a_{i,j})_{i,j}$ où $1 \le i \le p$ et $1 \le j \le n$.
  i est l'indice de ligne et j celui de colonne.
  $f(e_1), \cdots, f(e_n)$ sont les vecteurs colonnes de A.
- En notant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *et* $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$ les coordonnées respectives de $u \in E$ et de $u' = f(u) \in F$ (dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$) on écrit :

$$\boxed{Y = A.X}$$

1.3 Espace vectoriel($\mathcal{M}_{np}(K)$, + , .)

Définition :

- On appelle addition dans $\mathcal{M}_{np}(\mathbf{K})$ la loi de composition interne notée + définie par :
  $(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$.
- On appelle multiplication par un scalaire la loi de composition externe notée **.** définie par : $\lambda \in \mathbf{K}$, $\lambda.(a_{ij}) = (\lambda a_{ij})$.

Remarque : pour l'addition les 2 matrices doivent avoir le même format.

Proposition 1 :

- $(\mathcal{M}_{np}(\mathbf{K}), +, .)$ est un **K**-espace vectoriel.
- Soient E et F deux **K**-ev, de dimensions respectives p et n. Pour toutes bases $\mathcal{B}$ de E et $\mathcal{B}'$ de F, on définit l'application $\varphi : \mathcal{L}(E,F) \to \mathcal{M}_{np}(\mathbf{K})$, $f \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.
  Alors φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Définition : la matrice de $\mathcal{M}_{np}(\mathbf{K})$ dont tous les termes sont nuls sauf le $(i,j)^{\text{ème}}$terme qui est égal à 1 est appelée **matrice élémentaire** et est notée $\mathbf{E_{ij}}$.

Remarque : $E_{ij} = (\delta_{ki}\delta_{\ell j})_{1 \le k \le n,\, 1 \le \ell \le p}$ et $A = (a_{ij}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{ij}E_{ij}$.

Proposition 2 : ***base canonique de $\mathcal{M}_{np}(K)$***

- La famille $(E_{ij})_{1 \le i \le n,\, 1 \le j \le p}$ est une base de $\mathcal{M}_{np}(\mathbf{K})$ appelée base canonique de $\mathcal{M}_{np}(\mathbf{K})$.
- $\dim(\mathcal{M}_{np}(\mathbf{K})) = np$.

Conséquence : Soient E et F 2 **K**-espaces vectoriels de dimensions finies.
Alors l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$ est de dimension finie et
$\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim(E) \times \dim(F)$

1.4 Produit matriciel

Proposition 3 : Soient E, F et G trois **K**-ev de dimensions finies non nulles respectives q, p et n et de bases respectives $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_q)$, $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_p)$ et $\mathcal{B}'' = (g_1, \dots, g_n)$.
Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ avec $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = B = (b_{kj})_{1 \le k \le p, 1 \le j \le q}$
et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g) = A = (a_{ik})_{1 \le i \le n, 1 \le k \le p}$
Alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f) = (c_{ij})_{1 \le i \le n, 1 \le j \le q} \text{ où } c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}.$$

On définit alors le produit des matrices :

Définition : Soient $A = (a_{ik}) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbf{K})$ et $B = (b_{kj}) \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbf{K})$, on appelle **produit** de A par B et on note $A \times B$ la matrice $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{nq}(\mathbf{K})$ définie par :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \qquad 1 \le i \le n \text{ , } 1 \le j \le q$$

Remarques :
- $A \times B$ est défini si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.
- On peut noter $A \times B = AB$.

Proposition :
Soient $(f, g) \in (\mathcal{L}(E))^2$ et $\mathcal{B}$ une base de E. Alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$$

Proposition 5 :
i) Le produit des matrices est associatif et distributif par rapport à l'addition.
ii) $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est l'élément neutre de $(\mathcal{M}_n(\mathbf{K}), \times)$.

Proposition 6 : $(\mathcal{M}_n(\mathbf{K}), +, \times)$ est un anneau.

Remarques :

- La multiplication n'est pas commutative et l'anneau n'est pas intègre.
- On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est nilpotente s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0$.

1.5 Matrices inversibles

Proposition 7 : L'ensemble des éléments inversibles de $(\mathcal{M}_n(\mathbf{K}), \times)$ est un groupe appelé groupe linéaire et noté $GL_n(\mathbf{K})$.

Remarques :

- $A\in\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est inversible si et seulement si $\exists A'\in\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ / $AA' = A'A = I_n$.
  A' est alors noté A^{-1}.
- Ce groupe est isomorphe au groupe GL(E) où E **K**-espace vectoriel de dimension n.
- En particulier, si A et B inversibles alors AB inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

1.6 Transposition

Définition : On appelle transposée de la matrice $A = (aij)\in\mathcal{M}_{np}(\mathbf{K})$ la matrice :
$^tA = (a'_{ij})\in\mathcal{M}_{pn}(\mathbf{K})$ telle que $a'_{ij} = a_{ji}$ pour $1 \le i \le p$, $1 \le j \le n$.

Remarque : L'application $A \mapsto {}^tA$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_{np}(\mathbf{K})$ sur $\mathcal{M}_{pn}(\mathbf{K})$.

Proposition 8 :

- $\forall(A, B)\in(\mathcal{M}_n(\mathbf{K}))^2$, $\quad {}^t(A.B) = {}^tB.{}^tA$.
- Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que A inversible. Alors ^tA est inversible et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

1.7 Trace d'une matrice carrée

Définition : Soit $A = (a_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On appelle **trace de A** la somme de ses éléments diagonaux : $\quad tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Proposition 9 :

- L'application tr : $\mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \to \mathbf{K}$, $A \mapsto tr(A)$ est une forme linéaire.
- $\forall(A, B)\in(\mathcal{M}_n(\mathbf{K}))^2 \quad tr(AB) = tr(BA)$.

1.8 Matrices remarquables

Définition : Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On dit que :

- A est une matrice **scalaire** d'ordre n si $A = \alpha I_n$ où $\alpha\in\mathbf{K}$.
- A est une matrice **diagonale** si $\forall(i, j) \in(\{1,\dots,n\})^2$, $i \ne j \Rightarrow a_{ij} = 0$.
  On note parfois $D = diag(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ une telle matrice et $\mathcal{D}_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices diagonales d'ordre n.
- A est une matrice **symétrique** si $^tA = A$.
  On note $\mathcal{S}_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n.
- A est une matrice **antisymétrique** si $^tA = - A$.
  On note $\mathcal{A}_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n.
- A est une matrice **triangulaire supérieure** si $\forall(i, j)\in(\{1,\dots,n\})^2$, $i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$.
- A est une matrice **triangulaire inférieure** si $\forall(i, j)\in(\{1,\dots,n\})^2$, $i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$.

Proposition 10 :

- La multiplication est une loi de composition interne dans $\mathcal{D}_n(\mathbf{K})$.
- $\mathcal{S}_n(\mathbf{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbf{K})$ sont 2 sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
- D matrice diagonale est inversible si et seulement si $\forall i\in\{1,\dots,n\}$ $\lambda_i \ne 0$.
  On a alors : $D^{-1} = diag(\lambda_1^{-1},\dots,\lambda_n^{-1})$

Remarque : de même une matrice triangulaire est inversible si et seulement si tous ses éléments diagonaux sont différents de 0.

2. CHANGEMENT de BASES

2.1 Matrice de passage

Définition : Soit E un **K**-espace vectoriel de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$), et $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ 2 bases de E .

On appelle **matrice de passage** $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ la matrice dont les colonnes sont formées par les composantes des vecteurs de $\mathcal{B}'$ exprimées dans la base $\mathcal{B}$.

Proposition 11 : Pour toutes bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E on a : $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)$.

Proposition 12 :
- $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est inversible et $P^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.
- Si $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ sont 3 bases de E, alors : $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}$.

2.2 Formules de changement de bases

Proposition 13 : ***changement de base pour un vecteur***
Soient E un **K**-espace vectoriel, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ 2 bases de E , $x \in E$, $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $X' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$.
Alors : $\mathbf{X = P\,X'}$ (avec $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$).

Proposition 14 : ***changement de base pour une application linéaire***
Soient E et F deux **K**-espaces vectoriels, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F avec : $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ et $Q = Q_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$ Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que : $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f)$.
Alors : $A' = Q^{-1}AP$

Proposition 15 : ***changement de base pour un endomorphisme***
Soient E un **K**-espace vectoriel, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ 2 bases de E avec $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que : $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.
Alors : $\mathbf{A' = P^{-1}AP.}$

Définition : Soit $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbf{K}))^2$.

On dit que A et B sont **semblables (ou équivalentes)** s'il existe $P \in GL_n(\mathbf{K})$ telle que : $B = P^{-1}AP$ (on note alors $A \sim B$).

3. OPERATIONS ELEMENTAIRES sur les matrices

Définition : Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbf{K})$ avec $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

On appelle **opérations élémentaires** sur les lignes de A :
- la permutation (ou l'échange) de 2 lignes notée $L_i \leftrightarrow L_j$
- le produit d'une ligne par λ ($\lambda \in \mathbf{K}^*$) notée $L_i \leftarrow \lambda L_i$
- l'addition à une ligne d'une autre ligne multipliée par λ ($\lambda \in \mathbf{K}$) notée $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$

Remarque : on définit de même les opérations élémentaires sur les colonnes de A.

Proposition 16 : chaque opération élémentaire sur une matrice A correspond au produit de A par une matrice carrée inversible.

4. RANG d'une MATRICE

Définition : Soit $A\in\mathcal{M}_{np}(\mathbf{K})$. On appelle **rang** de A le rang de ses vecteurs colonnes.
On le note rg(A).

Proposition 17 : $\forall A\in\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ on a : $rg(A) \leq \inf(n,p)$.

Proposition 18 : Soient E et F deux **K**-espaces vectoriels de bases respectives $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $f\in\mathcal{L}(E, F)$ avec $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$. Alors :

$$rg(f) = rg(A).$$

Proposition 19 : $\forall A\in\mathcal{M}_{np}(\mathbf{K})$ avec $A= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$, on a :

- $rg(A) = n$ si et seulement si f est surjective.
- $rg(A) = p$ si et seulement si f est injective.

Proposition 20 : $\forall A\in\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ on a : $rg(A) = n \Leftrightarrow A\in GL_n(\mathbf{K})$.

Proposition 21 : Soient $A\in\mathcal{M}_{np}(\mathbf{K})$ et $B\in\mathcal{M}_{pq}(\mathbf{K})$.
Alors : $rg(AB) \leq \inf\{rg(A), rg(B)\}$.

Proposition 22 : $\forall A\in\mathcal{M}_{np}(\mathbf{K})$, on a :

- Si $B\in GL_n(\mathbf{K})$ alors $rg(BA) = rg(A)$.
- Si $C\in GL_p(\mathbf{K})$ alors $rg(AC) = rg(A)$.

Remarque : On en déduit que les opérations élémentaires sur une matrice ne changent pas le rang de cette matrice.

Proposition 23 : $A\in\mathcal{M}_{np}(\mathbf{K})$ est de rang r si et seulement si il existe 2 matrices carrées inversibles U et V telles que :

$$A = U\, J_{n,p,r}\, V$$

où $J_{n,p,r}$ est la matrice $(a_{ij})\in\mathcal{M}_{np}(\mathbf{K})$ telle que $a_{ij} = 1$ si $i = j \leq r$ et $a_{ij} = 0$ sinon.

Proposition 24 : $\forall A\in\mathcal{M}_{np}(\mathbf{K})$, $rg({}^tA) = rg(A)$.