# AL 10 ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE

Dans tout le chapitre **K** désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

## I. DIMENSION

### 1.1 Familles génératrices, familles libres

**Proposition 1 :**
Soient E un **K**-espace vectoriel, $n\in \mathbb{N}^*$, $p\in \mathbb{N}^*$ / $p > n$ et $(x_1, x_2, ...,x_n, ..., x_p)\in E^p$ .
Si $(x_1, x_2,..., x_n)$ est une famille génératrice de E alors $(x_1, x_2, ..., x_n, ..., x_p)$ est aussi une famille génératrice de E.

**Proposition 2 :**
Soient E un **K**-espace vectoriel, $n\in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{S}' = (x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1})\in E^{n+1}$ et $\mathcal{S} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$.
Si $\mathcal{S}'$ est génératrice de E et $x_{n+1}\in \mathrm{Vect}(\mathcal{S})$, alors $(\mathcal{S})$ est une famille génératrice de E.

**Proposition 3 :**
Soient E un **K**-espace vectoriel, $n\in \mathbb{N}^*$, $p\in \mathbb{N}^*$ / $p > n$ et $(x_1, x_2, ..., x_n, ..., x_p)\in E^p$.
Si $(x_1, x_2, ..., x_n, ..., x_p)$ est une famille libre alors $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est une famille libre (sous-famille).

**Proposition 4 :**
Soient E un **K**-espace vectoriel, $n\in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{S}' = (x_1, x_2,\cdots, x_n, x_{n+1})\in E^{n+1}$ et $\mathcal{S} = (x_1,x_2,\cdots, x_n)$.
Si $\mathcal{S}$ est libre et $x_{n+1} \notin \mathrm{Vect}(\mathcal{S})$ alors $\mathcal{S}'$ est libre.

### 1.2 Dimension finie

**Définition :** On dit qu'un **K**-espace vectoriel E est de **dimension finie** si E admet une famille génératrice finie.

**Théorème - définition 1 :** Soit E un **K**-espace vectoriel de dimension finie. Alors :
a) E admet au moins une base finie.
b) Toutes les bases de E sont finies et ont le même cardinal, ce cardinal est appelé la dimension de E, et est noté dim(E).

**Remarque** : Par convention $\dim(\{0\}) = 0$.

**Définition :**
- Un espace vectoriel de dimension 1 est appelé droite vectorielle.
- Un espace vectoriel de dimension 2 est appelé plan vectoriel.

**Remarque** : Une droite vectorielle est engendrée par n'importe lequel de ses vecteurs non nul.

**Lemme :** (*théorème d'échange)*
Soient $\mathcal{G} = \{x_1, x_2, ..., x_{\mathbf{p}}\}$ une famille génératrice d'un espace vectoriel E et $\mathcal{L} = \{y_1, y_2, ..., y_{\mathbf{r}}\}$ une famille libre de E.
a) $\mathbf{r \leq p}$.
b) On peut remplacer d'au moins une façon **r** vecteurs de $\mathcal{G}$ par les **r** vecteurs de $\mathcal{L}$ pour obtenir une famille génératrice de E.

**Théorème 2 :** (***théorème de la base incomplète***)
Soient E un **K**-espace vectoriel non nul, de dimension finie n et $\mathcal{B} = (e_1,\cdots,e_n)$ une base de E.
Soit $\mathcal{L}=(y_1, y_2, ..., y_{\mathbf{r}})$ une famille libre de E.
1ère Version (forme forte) :
il existe au moins une façon de compléter la famille libre $\mathcal{L}$ par $(\mathbf{n - r})$ vecteurs de $\mathcal{B}$ pour obtenir une base de E.
2ème Version (forme faible) :
il existe au moins une façon de compléter la famille libre $\mathcal{L}$ par $(\mathbf{n - r})$ vecteurs de E pour obtenir une base de E.

**Proposition 1 :** Soit E un **K**-espace vectoriel de dimension finie n. Alors :
a) toute famille libre de E a au plus n éléments
b) toute famille génératrice a au moins n éléments

**Remarques** : Soit E un espace vectoriel / dim(E) = n.
- Toute famille de E ayant au moins (n + 1) éléments est liée.
- Toute famille de E ayant au plus (n – 1) éléments n'est pas génératrice.

**Proposition 2 :** Dans un espace vectoriel de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$) :
i) Toute famille libre de n éléments est une base.
ii) Toute famille génératrice de n éléments est une base.

### 1.3 Espaces vectoriels produits

**Proposition :** Soient E et F 2 **K**-espaces vectoriels de dimensions finies.
Alors $E \times F$ est de dimension finie et : $\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$

**Remarque** : Cette proposition s'étend au produit de n espaces vectoriels.

### 1.4 Dimension de sous-espaces vectoriels

**Proposition 1 :** Soit E un **K**-espace vectoriel de dimension finie.
Tout sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$.

**Définition** : Dans un espace vectoriel de dimension n, on appelle *hyperplan* tout sous-espace vectoriel de dimension n -1.

**Corollaire :** Soient E un **K**-espace vectoriel de dimension finie n et F, G 2 sous-espaces vectoriels de E. Alors :

$$((F \subset G) \text{ et } \dim(F) = \dim(G)) \Rightarrow F = G$$

**Proposition 2 :**
i) Soient E un **K**-espace vectoriel de dimension finie et F isomorphe à E.
Alors dim(E) = dim(F).
ii) Soient E et F 2 **K**-espaces vectoriels de même dimension (finie).
Alors E et F sont isomorphes.

**Remarque** : Si dim(E) = n, alors E est isomorphe à $\mathbf{K}^n$.

### 1.5 Rang d'une famille de vecteurs

**Définition :** Soient E un **K**-espace vectoriel et $\mathcal{S}$ une famille finie de vecteurs de E.
On appelle **rang** de $\mathcal{S}$ l'entier naturel rg($\mathcal{S}$) = dim( Vect($\mathcal{S}$) ) .

**Proposition :** Soient E un **K**-espace vectoriel et $\mathcal{S}$ une famille finie de vecteurs de E.
i) rg($\mathcal{S}$) est le plus grand cardinal des sous-familles libres de $\mathcal{S}$.
ii) $\mathcal{S}$ est libre si et seulement si rg($\mathcal{S}$) = card($\mathcal{S}$).

## II. SOUS ESPACES VECTORIELS SUPPLEMENTAIRES

**Proposition 1 :** Soient E un **K**-espace vectoriel de dimension finie n et F un sous-espace vectoriel de E de dimension p.
i) F admet au moins un supplémentaire dans E.
ii) Tout supplémentaire de F dans E est de dimension n - p :
si $E = F \oplus G$ alors dim(E) = dim(F) + dim(G).

**Proposition 2 :** Soient F et G deux sous-espaces vectoriels non nuls dans un **K**-espace vectoriel E de dimension finie, $(x_1,\cdots,x_n)$ une base de F et $(y_1,\cdots,y_p)$ une base de G. Alors : $E = F \oplus G \Leftrightarrow (x_1,\cdots,x_n, y_1,\cdots,y_p)$ est une base de E.

**Théorème :** Soit E un **K**-espace vectoriel de dimension finie. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors : dim(F + G) = dim(F) + dim(G) - dim($F \cap G$)

**Proposition 3 :** Soient F et G 2 sous-espaces vectoriels d'un **K**-espace vectoriel de dimension finie E. Les propositions suivantes sont équivalentes :
**(1)** $E = F \oplus G$
**(2)** $F \cap G = \{0_E\}$ et dim(E) = dim(F) + dim(G)
**(3)** E = F + G et dim(E) = dim(F) + dim(G)

## III. APPLICATIONS LINEAIRES EN DIMENSION FINIE

Soient E et F 2 **K**-espaces vectoriels de dimensions finies. On pose n = dim(E) et p = dim(F).

### 3.1 Rang d'une application linéaire

**Proposition 1 :** $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est déterminée par la donnée des images des éléments d'une base de E.

**Définition :** Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
On appelle **rang de f** l'entier naturel noté **rg(f)** défini par : rg(f) = dim(Imf).

**Théorème :** ***Théorème du rang***

Soient E de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Alors :

$$rg(f) = dim(E) - dim(Ker f) .$$

**Remarques** :

- Le théorème peut être présenté sous la forme : dim (E) = dim( Ker f) + dim (Im f).
- $rg(f) \leq dim(E)$.
- rg(f) = dim(E) si et seulement si f est injective.

**Proposition 2 :** Soient E et F 2 **K**-espaces vectoriels **de même dimension** $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
Les propriétés suivantes sont alors équivalentes :

**(1)** f est injective
**(2)** f est surjective
**(3)** f est bijective
**(4)** rg(f) = n

### 3.2 Image d'une base

**Proposition :** Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) f est bijective.
(2) pour toute base $\mathcal{B}$ de E, $f(\mathcal{B})$ est une base de F.
(3) il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $f(\mathcal{B})$ soit une base de F.