AL.9 APPLICATIONS LINEAIRES

1. MORPHISMES

Définition 1 : Soient E et F deux espaces vectoriels sur **K** et f une application de E dans F.
On dit que f est une **application linéaire** de E dans F si :
$\forall(x, y)\in E^2$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$
$\forall(\lambda,x)\in \mathbf{K} \times E \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$

Définition 2 : On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F .
On dit aussi qu'une application linéaire f est un morphisme d'espaces vectoriels et :

- Si f est bijective on dit que f est un *isomorphisme* et que E et F sont *isomorphes*.
- Si E = F on dit que f est un *endomorphisme* de E, on note $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E,E)$.
- Si E = F et f bijective on dit que f est un *automorphisme* de E, on note $\mathcal{GL}(E)$ ou Aut(E) l'ensemble des automorphismes de E.
- Si F = $\mathbb{R}$ on dit que f est une *forme linéaire.*

Remarques : Soit $f\in\mathcal{L}(E, F)$

- $f(0_E) = 0_F$
- f est caractérisée par ses restrictions à 2 sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Proposition 1 : Soient E et F deux espaces vectoriels sur **K** et f une application de E dans F.

f est une application linéaire si et seulement si :

$\forall(x, y)\in E^2$, $\forall\lambda\in \mathbf{K}$, $\quad f(\lambda.x + y) = \lambda.f(x) + f(y)$

2. OPERATIONS

Proposition 2 : Soient E et F deux **K**-espaces vectoriels.
Alors $\mathcal{L}(E,F)$ est un **K**-espace vectoriel pour les lois usuelles.

Proposition 3 : Soient E, F et G trois **K**-espaces vectoriels.
$\forall f\in\mathcal{L}(E, F)$, $\forall g\in\mathcal{L}(F, G)$, on a : $g o f\in\mathcal{L}(E, G)$.

Proposition 4 : Soit E un **K**-espace vectoriel.
$(\mathcal{L}(E), + , o)$ est un anneau.

Remarque : Cet anneau est non commutatif et non intègre.

Définition 3 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$

- On définit $f^0 = id$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$: $f^n = f \circ f^{n-1}$.
- S'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n = 0$, on dit que f est nilpotent.

Proposition 5 : Soient E et F deux **K**-espaces vectoriels.
Si f est un isomorphisme de E dans F, alors f^{-1} est un isomorphisme de F dans E.

Proposition 6 : Soit E un **K**-espace vectoriel.
L'ensemble Aut(E) des automorphismes de E est un groupe pour la loi o .

Définition 4 : Soit E un espace vectoriel sur **K.**
Le groupe (Aut(E) , o) est appelé **groupe linéaire** de E (également noté $\mathcal{GL}(E)$).

3. NOYAU, IMAGE

Soient E et F deux **K**-espaces vectoriels.

Proposition 7 : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- Pour tout sous-espace vectoriel E_1 de E, $f(E_1)$ est un sous-espace vectoriel de F.
- Pour tout sous-espace vectoriel F_1 de F, $f^{-1}(F_1)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Définition 5 : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- On appelle **noyau de f** et on note **Ker(f)** l'ensemble
  $Ker(f) = \{x \in E \ / \ f(x) = 0_F\} = f^{-1}(\{0_F\})$.
- On appelle **image de f** et on note **Im(f)** l'ensemble
  $Im(f) = f(E) = \{y \in F \ / \ \exists x \in E, \ y = f(x)\}$

Corollaire : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- Ker(f) est un sous-espace vectoriel de E.
- Im(f) est un sous-espace vectoriel de F.

Application : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. $Inv\ f = \{x \in E \ / \ f(x) = x\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Théorème : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
i) f est injective si et seulement si $Ker(f) = \{0_E\}$.
ii) f est surjective si et seulement si $Im(f) = F$.

Proposition 8 : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Im(f) est isomorphe à tout supplémentaire de Ker(f).

4. Bases et Isomorphismes

Proposition 9 : Soit f∈$\mathcal{L}$(E, F) et $(x_1,\ldots,x_n)$ une famille de vecteurs de E .

f(Vect($(x_1,\ldots,x_n)$)) = Vect(f($(x_1,\ldots,x_n)$))

Proposition 10 : Soit f∈$\mathcal{L}$(E, F).

1) f est surjective si et seulement si l'image par f d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de F.
2) f est injective si et seulement si l'image par f d'une famille libre de E est une famille libre de F.
3) f est un isomorphisme si et seulement si l'image d'une base de E est une base de F.

Proposition 11 :

Si un **K**-espace vectoriel E admet une base ayant n éléments alors E et $\mathbf{K}^n$ sont isomorphes.

5. PROJECTEURS

Définition 6 : Soient E_1 et E_2 2 sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un **K**-espace vectoriel E ($E = E_1 \oplus E_2$) .

- On appelle **projection sur E_1 parallèlement à E_2** l'application p_1: E → E définie de la manière suivante **:**

  $\forall x \in E, \exists!(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 \,/\, x = x_1 + x_2$ alors $p_1(x) = x_1$.
- De même, on appelle projection sur E_2 parallèlement à E_1 l'application p_2 : E → E telle que $p_2(x) = x_2$.

Définition 7 : Soient E un **K**-espace vectoriel et p une application de E dans E.

On dit que p est un **projecteur** si : **pop = p** et p∈$\mathcal{L}$(E).

Proposition 12 :

(1) p_1 et p_2 sont des projecteurs

(2) $E_1 = \text{Im } p_1 = \text{Inv } p_1 = \text{Ker } p_2$ et $E_2 = \text{Ker } p_1 = \text{Im } p_2 = \text{Inv } p_2$

(3) $p_1 + p_2 = Id_E$

(4) $p_1 o p_2 = 0 = p_2 o p_1$

Proposition 13 : Soit p un projecteur d'un **K**-espace vectoriel E.

Alors $E = \text{Ker } p \oplus \text{Im } p$

Conséquence : Si p un projecteur alors p est la projection sur Im p parallèlement à Ker p.

Proposition 14 : Soit p∈$\mathcal{L}$(E).

p est un projecteur de E si et seulement si $q = Id_E - p$ est un projecteur de E.

6. INVOLUTIONS, SYMETRIES

Définition 8 : Soient E_1 et E_2 2 sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un **K**-espace vectoriel E ($E = E_1 \oplus E_2$) .
On appelle **symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2** l'application $s_1 : E \to E$ définie de la manière suivante **:**

$$\forall x \in E, \exists!(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 \,/\, x = x_1 + x_2 \quad \text{alors} \quad s_1(x) = x_1 - x_2.$$

Remarque : On définit de même s_2.

Définition 9 : Soient E un **K**-espace vectoriel et f une application de E dans E. On dit que f est une **involution linéaire** si : $f^2 = Id_E$ et $f \in \mathcal{L}(E)$

Remarque : Soit f une involution linéaire. Alors $f \in \mathcal{GL}(E)$.

Proposition 15 :
- i) Toute symétrie est une involution linéaire.
- ii) $s_1 = 2p_1 - Id_E$.

Remarques :
- $Ker(f - Id_E) = Inv(f)$.
- $Ker(f + Id_E) = Opp(f) = \{x \in E \,/\, f(x) = -x\}$.

Proposition 16 : Soit f une involution linéaire de E.

$$E = Ker(f - Id_E) \oplus Ker(f + Id_E).$$

Conséquence : Si f est une involution linéaire de E, alors f est la symétrie par rapport à $Ker(f - Id_E)$ parallèlement à $Ker(f + Id_E)$.