AL.8 Espaces Vectoriels

Dans ce chapitre, $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Espaces vectoriels

Définition 1 :

Soit E un ensemble. On appelle **loi de composition externe** sur E toute application de $\mathbf{K} \times E$ dans E (notée **.**) :

$$\begin{aligned} \mathbf{K} \times E &\to E \\ (\lambda, x) &\mapsto \lambda . x \end{aligned}$$

Remarque : on note souvent λx pour $\lambda . x$

Définition 2 :

On appelle ***espace vectoriel*** sur **K** ou **K**-espace vectoriel tout ensemble E muni d'une loi de composition interne notée + et d'une loi de composition externe notée **.** telles que :

- (E, +) est un groupe commutatif.
- La loi externe vérifie les 4 propriétés : $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$, $\forall(x, y) \in E^2$, on a :
  i) $(\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$
  ii) $\lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$
  iii) $\lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu)x$
  iv) $1.x = x$

Remarque : Une conséquence de cette définition est que $\lambda.x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $\lambda = 0$.

Définition 3 :

- Les éléments d'un espace vectoriel sont appelés *vecteurs*.
- Les éléments du corps **K** sont appelés *scalaires.*

<u>Théorème</u> : *espace vectoriel produit.*
Soient $E_1, E_2, \ldots, E_n$ des **K**-espaces vectoriels et $E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$. Alors E est un **K**-espace vectoriel pour les lois interne et externe définies par :

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$
$$\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$$

II. Sous - espaces vectoriels

Définition 1 :

Soient E un **K**-espace vectoriel et $F \subset E$. On dit que F est un ***sous-espace vectoriel*** de E si :

1) $F \neq \varnothing$
2) $\forall(x, y) \in F^2$, $x + y \in F$
3) $\forall \lambda \in \mathbf{K}$, $\forall x \in F$, $\lambda x \in F$

Remarque : 0 est élément de tout espace vectoriel (et de tout sous-espace vectoriel), donc on a : F est un ***sous-espace vectoriel*** de E si et seulement si :

1) $0 \in F$
2) $\forall(x, y) \in F^2$, $\forall \lambda \in \mathbf{K}$, $x + \lambda y \in F$

<u>Proposition</u> 1:
Tout sous-espace vectoriel de E est un espace vectoriel pour les lois induites par celles de E.

Remarque : On montre rarement directement qu'un ensemble est un espace vectoriel mais souvent que c'est un sous espace vectoriel d'un espace vectoriel connu.

<u>Proposition</u> 2 :
Soit E un **K**-espace vectoriel. L'intersection de 2 sous espaces vectoriels de E est un sous espace vectoriel de E.

<u>Attention !</u> La proposition est fausse pour l'union.

<u>Définition</u> 2 :
Soient E un **K**-espace vectoriel et F_1, F_2 2 sous espaces vectoriels de E.
On note $F_1 + F_2 = \{ x\in E \ / \ \exists(x_1, x_2)\in F_1 \times F_2 , \ x = x_1 + x_2 \}$. $F_1 + F_2$ est appelé somme de F_1 et F_2.

<u>Proposition</u> 3 :
Soient E un **K**-espace vectoriel et F_1, F_2 2 sous-espaces vectoriels de E.
$F_1 + F_2$ est un sous-espace vectoriel de E.

<u>Définition</u> 3 :
Soient E un **K**-espace vectoriel et F_1, F_2 2 sous espaces vectoriels de E. On dit que F_1 et F_2 sont en ***somme directe*** si $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$. On note alors $F_1 \oplus F_2$ au lieu de $F_1 + F_2$.

<u>Proposition</u> 4 :
Soient E un **K**-espace vectoriel et F_1, F_2 2 sous-espace vectoriel de E . La somme $F_1 + F_2$ est ***directe*** si et seulement si : $\forall x\in F_1 + F_2, \exists!(x_1, x_2)\in F_1 \times F_2$ tel que $x = x_1 + x_2$.

<u>Définition</u> 4 :
Soient E un **K**-espace vectoriel et F_1, F_2 2 sous-espace vectoriel de E. On dit que F_1et F_2 sont **supplémentaires** dans E si : $E = F_1 + F_2$ et $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.

Remarque : F_1 et F_2 sont supplémentaires si et seulement si : $E = F_1 \oplus F_2$

III. <u>Base d'un espace vectoriel</u>

a) <u>Familles génératrices</u>

<u>Définition</u> 1 :
Soient E un **K**-ev , $n\in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, x_2, ... , x_n)\in E^n$. On dit que $x\in E$ est ***combinaison linéaire*** de $x_1, x_2, ..., x_n$ si $\exists(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)\in \mathbf{K}^n$ tel que :

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

<u>Proposition</u> :
Soient E un **K**-espace vectoriel, $n\in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, x_2, ..., x_n)\in E^n$. L'ensemble des combinaisons linéaires de $x_1, x_2, ... , x_n$ est un sous-espace vectoriel de E noté $\mathrm{Vect}(x_1, x_2, ... , x_n)$.

Définition 2 :

Soient E un **K**-ev , $n\in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, x_2,..., x_n)\in E^n$. On dit que $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est une **famille génératrice** de E si :

$$\forall x\in E, \quad \exists(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)\in \mathbf{K}^n \text{ tel que } x = \lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 +...+\lambda_nx_n = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i .$$

Remarque : $(x_1,x_2,...,x_n)$ est une famille génératrice de E ssi $\mathrm{Vect}(x_1,x_2,...,x_n) = E$

b) <u>Familles liées, familles libres</u>

Définition :

Soient E un **K**-espace vectoriel, $n\in \mathbb{N}^*$ et $(x_1,x_2,...,x_n)\in E^n$.

- On dit que $(x_1,x_2,...,x_n)$ est une ***famille libre*** de E si :
$$\forall(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)\in \mathbf{K}^n, (\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 +...+\lambda_nx_n = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 =... = \lambda_n = 0).$$
- On dit que $(x_1,x_2,...,x_n)$ est une famille ***liée*** si elle n'est pas libre .

Remarque : on dit que les éléments d'une famille libre (resp. ***liée***) sont ***linéairement indépendants*** (resp. ***dépendants***).

<u>Proposition</u> : Soient E un **K**-ev , $n\in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, x_2, ... , x_n)\in E^n$. $(x_1, x_2, ... , x_n)$ est une famille liée de E si et seulement si un au moins de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.

Remarque : Soient E un **K**-espace vectoriel et $(x, y)\in E^2$. (x, y) est liée si et seulement si x et y sont colinéaires, c'est à dire : $(x = 0 \text{ ou } \exists\, a\in \mathbf{K} / y = ax)$.

c) <u>Base d'un espace vectoriel</u>

Définition :

On appelle ***base*** de E toute famille libre et génératrice de E.

<u>Théorème - Définition</u> 1 : Soit $n\in \mathbb{N}^*$. Dans le **K**-espace vectoriel $E=\mathbf{K}^n$ la famille des vecteurs $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ définie par : $\forall i\in\{1,2,...,n\}$, $e_i=(0,...,0,1,0,...,0)$ (le 1 est à la $i^{\text{ème}}$ place) est une base de $\mathbf{K}^n$ appelée ***base canonique*** de $\mathbf{K}^n$.

<u>Théorème - Définition</u> 2 :

Une famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ... , e_n)$ d'éléments d'un **K**-espace vectoriel E est une base de E si et seulement si : $\forall\, x\in E, \quad \exists!(x_1, x_2, ..., x_n)\in \mathbf{K}^n \;/\; x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

$x_1, x_2, ..., x_n$ sont appelées ***coordonnées*** (ou composantes) de x dans la base $\mathcal{B}$.

Remarque : Il existe des espaces vectoriels ayant des bases comportant un nombre infini d'éléments : $\mathbb{R}[X]$ a pour base $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

<u>Théorème</u> 2 : Tout espace vectoriel $E\neq\{0\}$ admet au moins une base.