

FRACTIONS RATIONNELLES

Dans ce chapitre \mathbf{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C}

1. DEFINITIONS-STRUCTURES

Définitions : On appelle **fraction rationnelle** tout quotient de 2 polynômes $F = \frac{P}{Q}$ ($Q \neq 0$).

- On note $\mathbf{K}(X)$ l'ensemble des fractions rationnelles.
- On dit qu'une fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ est **irréductible** si P et Q ont X^0 pour seul diviseur commun unitaire.
- On appelle degré de $F = \frac{P}{Q}$ ($F \neq 0$), l'entier relatif : $\deg(F) = \deg(P) - \deg(Q)$
- Dans $\mathbf{K}(X)$, on définit : $\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD + BC}{BD}$, $\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$ et pour $\lambda \in \mathbf{K}$,
 $\lambda \cdot \left(\frac{A}{B}\right) = \frac{(\lambda \cdot A)}{B}$.
- On appelle fonction rationnelle \tilde{F} associée à $F = \frac{P}{Q}$ la fonction de \mathbf{K} dans \mathbf{K} définie par $\tilde{F}(x) = \frac{\tilde{P}(x)}{\tilde{Q}(x)}$ pour tout x de \mathbf{K} tel que $\tilde{Q}(x) \neq 0$

Remarque : $\forall A \in \mathbf{K}[X], A/X^0 = A$, d'où $\mathbf{K}[X] \subset \mathbf{K}(X)$.

Théorème :

$(\mathbf{K}(X), +, \times)$ est un corps commutatif .

Définition : Soit $F = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle irréductible :

- On appelle **zéro de F** toute racine de P .
- On appelle **pôle de F** toute racine de Q .

Remarque : l'ordre de multiplicité d'un zéro ou d'un pôle est celui du zéro du polynôme correspondant.

2. DERIVATION

Définition : On appelle dérivée de la fraction rationnelle $F = \frac{P}{Q}$ la fraction rationnelle

$$F' = \frac{P'Q - PQ'}{Q^2}.$$

Proposition : Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ tel que $P = \lambda \prod_{k=1}^n (X - x_k)$ où $\lambda \in \mathbf{K}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{K}^n$.

$$\text{Alors : } \frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{X - x_k}.$$

3. DECOMPOSITION en ELEMENTS SIMPLES

3.1 Partie entière

Théorème-définition : Soit $F = \frac{A}{B}$ une fraction rationnelle.

$\exists!(Q, R) \in (\mathbf{K}[X])^2$ tel que $F = Q + \frac{R}{B}$ avec $\deg(R) < \deg(B)$ ou $R = 0$.

Q est appelée **partie entière** de F .

$\frac{R}{B}$ est appelée **partie fractionnaire** de F .

3.2 Eléments simples

Définition : On appelle élément simple dans $\mathbf{K}(X)$ toute fraction rationnelle de la forme

$$F = \frac{P}{Q^\alpha}$$

où Q est un polynôme irréductible de $\mathbf{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et $\deg(P) < \deg(Q)$.

Remarques :

- Dans $\mathbb{C}[X]$, on a alors : $\deg(Q) = 1$ (P constant).
- Dans $\mathbb{R}[X]$, on a alors :
 - i) $\deg(Q) = 1$: élément simple de 1^{ère} espèce
 - ou
 - ii) $\deg(Q) = 2$: élément simple de 2^{ème} espèce et $P = aX + b$.

3.3 Décomposition en éléments simples

Proposition 2 : Soit $F = \frac{A}{(X - a_1)(X - a_2) \cdots (X - a_n)}$, $A \in \mathbf{K}[X]$ tel que $\deg(A) < n$ et

$(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{K}^n$ (2 à 2 distincts). Alors $\exists! (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{K}^n$ tel que :

$$F = \frac{\alpha_1}{X - a_1} + \frac{\alpha_2}{X - a_2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{X - a_n}.$$

Proposition 3 : Soit $F = \frac{A}{B^n}$ où $(A, B) \in (\mathbf{K}[X])^2$ / B irréductible et $\deg(A) < \deg(B^n)$.

Alors : $\exists!(R_1, R_2, \dots, R_n) \in (\mathbf{K}[X])^n$ / $F = \frac{R_1}{B} + \frac{R_2}{B^2} + \cdots + \frac{R_n}{B^n}$ où $\deg(R_i) < \deg(B)$.

Théorème-définition : Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ tel que $F = \frac{A}{B}$. B peut s'écrire de manière unique de

la forme : $B = \alpha \prod_{i=1}^n (X - a_i)^{r_i}$ où $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ complexes 2 à 2 distincts et $\alpha \in \mathbb{C}$.

Alors F peut s'écrire de manière unique de la forme :

$$F = Q + \sum_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{1 \leq j \leq r_i} \frac{R_{ij}}{(X - a_i)^j} \right) \quad \text{où } R_{ij} \in \mathbb{C} \text{ et } Q \in \mathbb{C}[X].$$

Cette expression est appelée **décomposition en éléments simples** de F .

3.4 Pratique de la décomposition de $F = P/Q$

a) Préliminaires :

1. on met la fraction sous forme irréductible
2. à l'aide de la division euclidienne on détermine la partie entière et la partie fractionnaire
3. on factorise le dénominateur
4. on écrit la décomposition sous forme littérale (dans $\mathbb{C}[X]$ ou $\mathbb{R}[X]$)
5. on calcule alors les coefficients par des méthodes diverses :

b) Cas d'un pôle simple :

Soit $\frac{A}{X - a}$ la partie polaire de $F = \frac{P}{Q}$ relative au pôle simple a :

$$A = ((X - a)F)(a) = \frac{P(a)}{Q'(a)}$$

c) Cas d'un pôle multiple a d'ordre n :

- Le coefficient de $(X - a)^n$ est $((X - a)^n F)(a)$
- Pour les autres, on peut :
 - donner à X des valeurs et résoudre le système obtenu
 - multiplier par X et faire tendre ensuite X vers l'infini
 - utiliser éventuellement la parité et l'unicité de la décomposition
 - réduire au même dénominateur et déterminer les coefficients par identification