Al.6 POLYNÔMES

Dans tout le chapitre **K** désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. ALGEBRE K[X]

1.1 Notion de polynôme

Définition :

- On appelle **polynôme** *à une indéterminée X et à coefficients dans* **K** toute expression de la forme : $P = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ où $a_0, a_1, ..., a_n$ sont des éléments de **K** appelés **coefficients** de P.
- 2 polynômes sont égaux si leurs coefficients respectifs sont égaux.
- Lorsque tous les coefficients sont nuls on dit que P est le polynôme nul (noté $P = 0$).
- On note **K**[X] l'ensemble des polynômes à une indéterminée X et à coefficients dans le corps **K**.

Remarque : On identifie **K** avec l'ensemble des polynômes constants $P = a_0$.

Définition : Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un élément non nul de **K**[X] .

- On appelle **degré** de P et on note deg(P) le plus grand entier p tel que $a_p \neq 0$.
- Le coefficient $a_{\deg(P)}$ est appelé coefficient du terme de plus haut degré (ou *coefficient dominant*).

Remarques :

- Le degré du polynôme nul n'est pas défini.
- On dit que P est *unitaire* ou *normalisé* si $a_{\deg(P)} = 1$.
- On dit que P est *pair* si $\forall k \in \mathbb{N}$ tel que $2k+1 \leq n$ on a $a_{2k+1} = 0$
  impair si $\forall k \in \mathbb{N}$ tel que $2k \leq n$ on a $a_{2k} = 0$

Notation : L'ensemble contenant les polynômes de degré inférieur ou égal à n et le polynôme nul est noté $\mathbf{K}_n[X]$.

Remarque : Soient $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un élément de **K**[X]. Au polynôme P, on associe la **fonction polynômiale** $\tilde{P} : x \mapsto \tilde{P}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$

En pratique on pourra confondre polynôme et fonction polynômiale.

1.2 Opérations

Définitions : Soient $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$ 2 éléments de **K**[X]. On définit :

$P + Q = \sum_{k=0}^{\max(p,q)} (a_k + b_k) X^k$ $\qquad$ $\lambda \in \mathbf{K}$, $\lambda P = \sum_{k=0}^{p} (\lambda a_k) X^k$

$PQ = \sum_{k=0}^{p+q} c_k X^k$ où $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = \sum_{i+j=k} a_i b_j$ en complétant les polynômes par des zéros si besoin est, par exemple si $p < q$, on pose $a_{p+1} = 0$, ..., $a_q = 0$.

Proposition : Soient P et Q 2 éléments non nuls de **K**[X] :
1. Si $P + Q \neq 0$ alors $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$.
2. $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$

Proposition : les lois + et . sont des LCI dans K[X]. Elles sont associatives, commutatives et d'éléments neutres 0 et 1 respectivement.

Proposition : Soient P et Q 2 éléments non nuls de **K**[X] :
1. Si $P + Q \neq 0$ alors $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$.
2. $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$

2. DIVISION EUCLIDIENNE

Théorème-définition : Soient A et B 2 éléments de **K**[X] ($B \neq 0$)

Il existe un couple unique (Q, R) de polynômes de **K**[X] tel que :

$$\begin{cases} A = BQ + R \\ \deg(R) < \deg(B) \text{ ou } R = 0 \end{cases}$$

Q et R sont appelés *quotient* et *reste* de la *division euclidienne* de A par B

Proposition : Soient $a \in K$ et $P \in \mathbf{K}[X]$.
Le reste de la division euclidienne de P par X - a est P(a).

Définitions : Soient A et B 2 éléments de **K**[X] .
- On dit que **A est divisible par B** (ou que **B divise A**) s'il existe $Q \in \mathbf{K}[X]$ tel que l'on ait : $A = BQ$. On note alors $B|A$
- On dit qu'un élément P de **K**[X] est **irréductible** dans **K**[X] lorsqu'il est divisible seulement par les polynômes constants et les polynômes de la forme λP ($\lambda \in \mathbf{K}$).

3. DERIVATION

Définition : Pour tout $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ de **K**[X], on appelle **polynôme dérivé** de P et on note P'

le polynôme défini par $P' = 0$ si P est constant

$$P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} \quad \text{sinon}$$

Proposition : $\forall \alpha \in \mathbf{K}$, $\forall (P,Q) \in (\mathbf{K}[X])^2$ $(P + Q)' = P' + Q'$ $(\alpha P)' = \alpha P'$
$(PQ)' = P'Q + PQ'$

Proposition : (formule de Leibniz)

$$\forall (P, Q) \in (\mathbf{K}[X])^2, \forall k \in \mathbb{N}, \quad (PQ)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} C_k^i P^{(i)} Q^{(k-i)}.$$

Théorème : (formule de Taylor pour les polynômes)
Soit $P\in \mathbf{K}_n[X]$ et $a\in \mathbf{K}$:

$$P(X) = P(a) + P'(a)(X - a) + \dots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n$$

$$P(a + X) = P(a) + P'(a)X + \dots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}X^n$$

Remarque : en particulier pour a = 0, $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!}X^k$.

4. RACINES d'un POLYNÔME

4.1 Définition, propriétés

Définition : Soient $P\in \mathbf{K}[X]$ et $a\in \mathbf{K}$. On dit que a est une **racine** (ou un **zéro**) de P si P(a) = 0.

Proposition :

- a racine de P si et seulement si P est divisible par X – a.
- Si $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont n racines distinctes de P alors P est divisible par
  $(X - a_1)(X - a_2) \dots (X - a_n)$.
- Si $P\in \mathbf{K}_n[X]$ s'annule pour au moins n+1 valeurs distinctes alors P = 0.

Définition : Soit $a\in \mathbf{K}$ une racine de $P\in \mathbf{K}[X]$. On dit que a est de **multiplicité** k si :
$(X - a)^k$ divise P et $(X - a)^{k+1}$ ne divise pas P.

Remarque : si k = 1 on dit que a est une racine simple.

Proposition : Soient $a\in \mathbf{K}$ et $P\in \mathbf{K}[X]$. a est une racine de P de multiplicité k
si et seulement si il existe $Q\in \mathbf{K}[X]$ tel que $P = (X - a)^kQ$ avec $Q(a) \neq 0$.

Théorème : Soient $a\in \mathbf{K}$ et $P\in \mathbf{K}[X]$. a est une racine de P de multiplicité k
si et seulement si : $\forall i\in \{0,1,\dots,k-1\}$, $P^{(i)}(a) = 0$ et $P^{(k)}(a) \neq 0$.

4.2 Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$

Théorème : ***théorème de d'Alembert***
Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Corollaires :

- Les seuls polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes constants.
- Tout polynôme de degré n de $\mathbb{C}[X]$ admet exactement n racines distinctes ou confondues et peut s'écrire :
  $P = \alpha(X-a_1)^{r_1}(X-a_2)^{r_2}\cdots(X-a_p)^{r_p}$ avec $r_1 + r_2 + \dots + r_p = n$, les (a_i,r_i) désignant les p racines distinctes de P avec leur ordre de multiplicité $(1 \leq i \leq p)$.

4.3 Relation entre les coefficients et les racines

Définition : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$. On appelle **fonctions symétriques élémentaires** de $x_1, x_2, \dots, x_n$ les expressions :

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

$$\sigma_2 = \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} x_{i_1} x_{i_2} = (x_1x_2 + \dots + x_1x_n) + (x_2x_3 + \dots + x_2x_n) + \dots + x_{n-1}x_n$$

$$\vdots$$

$$\sigma_k = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k} \qquad (1 \le k \le n)$$

$$\vdots$$

$$\sigma_n = x_1 x_2 \dots x_n$$

Théorème : Soient $P \in \mathbb{C}[X]$, un polynôme de degré n ($n \in \mathbb{N}^*$), $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $x_1, x_2, \dots, x_n$ les n racines de P distinctes ou confondues. Alors :

$$\sigma_1 = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \dots, \quad \sigma_k = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}, \dots, \sigma_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

4.4 Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

Remarque : Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ peut être considéré comme polynôme de $\mathbb{C}[X]$.

Proposition 1 : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. $P \in \mathbb{R}[X]$ si et seulement si $\forall z \in \mathbb{C}$, $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$.

Proposition 2 : Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $k \in \mathbb{N}^*$.
a racine d'ordre k de P $\Leftrightarrow$ $\overline{a}$ racine d'ordre k de P.

Proposition 3 : Tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ de degré non nul est le produit de polynômes de degré 1 ou de degré 2 :

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{p} (X - a_i) \prod_{i=1}^{\frac{n-p}{2}} \left(X^2 - 2\,\mathrm{Re}(a_i) X + |a_i|^2 \right), \quad \text{où } n = d°(P).$$

Proposition 4 : Les seuls polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont :
i) Les polynômes constants ou de degré 1
ii) Les polynômes de degré 2 sans racine réelle (discriminant < 0)

Proposition 5 : Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré impair admet au moins une racine réelle.