

**AL.4 Nombres entiers naturels
Dénombrements**
I. Structure de \mathbb{N} :
a) Propriétés fondamentales

+ et \times sont des l.c.i. dans \mathbb{N} .

+ et \times sont commutatives, associatives, admettent des éléments neutres (0 et 1).

De plus, on a les propriétés suivantes :

$$\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{N}^4, \begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + c \leq b + d \\ ac \leq bd \end{cases}$$

Remarque : $(\mathbb{N}, +)$ et (\mathbb{N}, \times) sont des monoïdes.

b) Notations \sum, \prod

• La somme $u_1 + u_2 + \dots + u_n$ est notée $\sum_{k=1}^n u_k$ ou encore $\sum_{1 \leq k \leq n} u_k$.

• Le produit $u_1 \cdot u_2 \dots u_n$ est noté $\prod_{k=1}^n u_k$ ou encore $\prod_{1 \leq k \leq n} u_k$.

1) Changement d'indice : Soient $S = \sum_{k=1}^n u_k$ et $P = \prod_{k=1}^n u_k$. On peut changer les indices en introduisant une nouvelle indexation, prenons par exemple $i = k + b$, on obtient alors :

$$S = \sum_{i=b+1}^{n+b} u_{i-b} \text{ et } P = \prod_{i=b+1}^{n+b} u_{i-b}.$$

2) Double somme - Double produit Soient I et J des parties de \mathbb{N} .

Les lois + et \times étant commutatives et associatives on définit :

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_{ij} = \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} a_{ij} \right) = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} a_{ij} \right)$$

$$\prod_{(i,j) \in I \times J} a_{ij} = \prod_{i \in I} \left(\prod_{j \in J} a_{ij} \right) = \prod_{j \in J} \left(\prod_{i \in I} a_{ij} \right)$$

c) Propriétés sur les parties de \mathbb{N}

Proposition 1 : Toute partie non vide de \mathbb{N} admet un plus petit élément.

Proposition 2 : Toute partie non vide et majorée de \mathbb{N} admet un plus grand élément.

Proposition 3 : (principe de récurrence)

Si une partie A de \mathbb{N} vérifie : $0 \in A$ et $(n \in A \Rightarrow n + 1 \in A)$, alors $A = \mathbb{N}$.

d) Principe de récurrence*Récurrence simple*

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{P}(n)$ une propriété portant sur un entier n tel que $n \geq n_0$.

Pour prouver la validité de $\mathcal{P}(n)$ pour tout $n \geq n_0$ il faut et il suffit que l'on ait :

$$\mathcal{P}(n_0) \text{ vraie et pour tout } n \geq n_0, \mathcal{P}(n) \text{ vraie} \Rightarrow \mathcal{P}(n+1) \text{ vraie.}$$

Récurrence forte

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{P}(n)$ une propriété portant sur un entier n tel que $n \geq n_0$.

Pour prouver la validité de $\mathcal{P}(n)$ pour tout $n \geq n_0$ il faut et il suffit que l'on ait :

$$\mathcal{P}(n_0) \text{ vraie et } \forall n \geq n_0, (\forall k \in [n_0, n] \mathcal{P}(k) \text{ vraie}) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1) \text{ vraie.}$$

II. Ensembles finis – Dénombrements On note $F_n = \{1, 2, \dots, n\}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.**a) Permutation****Définition :**

On appelle **permutation** de F_n toute bijection de F_n dans F_n .

Notation : On note σ_n l'ensemble des permutations de F_n .

Proposition : $\text{card}(\sigma_n) = n!$

b) Arrangement**Définition :**

On appelle **arrangement** de p éléments de F_n ($p \leq n$) tout p -uplet (x_1, x_2, \dots, x_p) d'éléments de F_n .

Exemple : $(2, 1, 4)$ est un arrangement de 3 éléments de F_4 .

Notation : On note A_n^p le nombre d'arrangements de p éléments de F_n .

Remarques :

- La donnée d'un arrangement de p éléments de F_n revient à la donnée d'une application injective de F_p dans F_n . Plus précisément, il y a bijection entre les applications injectives de F_p dans F_n et l'ensemble des arrangements de p éléments de F_n .
- $A_n^1 = n$ et $A_n^n = n!$

Proposition :

Le nombre d'arrangements de p éléments de F_n est égal à $A_n^p = \prod_{k=n-p+1}^n (k) = \frac{n!}{(n-p)!}$

c) Combinaison**Définition :**

On appelle **combinaison** de p éléments de F_n ($p \leq n$) toutes parties $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ d'éléments

F_n , leur nombre est noté C_n^p ou $\binom{n}{p}$

Proposition 1 :

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 / p \leq n, C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Remarque : $C_n^0 = C_n^n = 1$

Proposition 2 :

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 / p \leq n, C_n^p = C_n^{n-p} \quad \text{et} \quad C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$$

Théorème : formule du binôme de Newton

Soient a, b deux éléments de K et $n \in \mathbb{N}$ alors :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$$

Corollaire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0.$$

Proposition 3 :

Pour tout ensemble fini E , l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E est fini et :

$$\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\text{card}(E)}.$$