

AL.3
Applications - Lois de composition interne

I. APPLICATIONS

a) Définitions

Définitions : Soient E et F deux ensembles.

- On appelle **fonction** de E vers F toute relation f de E vers F telle que pour tout élément x de E, on lui associe au plus un élément y de F ; on écrit $y = f(x)$.
- On appelle **ensemble** (ou **domaine**) **de définition** de la fonction f, l'ensemble des éléments x de E tels qu'il existe y de F vérifiant $y = f(x)$; cet ensemble est noté D_f .
- Une fonction f est appelée **application** lorsque $D_f = E$.

Remarques :

- L'ensemble des applications de E vers F est noté F^E
- On note souvent $f : E \rightarrow F$
 $x \mapsto f(x)$; $f(x)$ est l'image de x par f (élément de F associé à x par f)
- $f : E \rightarrow F$, $g : F \rightarrow G$ 2 applications, on définit $g \circ f : E \rightarrow G$ par $g \circ f(x) = g(f(x))$
- $f : E \rightarrow E$ définie par $f(x) = x$ est appelée application identique dans E et notée Id_E

Proposition (associativité) :

Pour toutes applications $f : E \rightarrow F$, $g : F \rightarrow G$, $h : G \rightarrow H$, on a :
 $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

b) Applications injectives, surjectives, bijectives

Définition : Soit f une application de E vers F, on dit que :

- f est **injective** si $\forall (a,b) \in E^2 \ a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$
- f est **surjective** si $\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y$
- f est **bijective** si f est injective et surjective (ou encore $\forall y \in F, \exists ! x \in E, y = f(x)$).
 Dans ce cas f admet une bijection réciproque f^{-1} de F vers E telle que :
 $x \in E, y \in F, y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

Remarque : $f : E \rightarrow F$ est bijective si et seulement si il existe $g : F \rightarrow E$ telle que $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$. On a alors $g = f^{-1}$

Propriétés :

- Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
- Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
- La composée de 2 injections est une injection
 surjections est une surjection
 bijections est une bijection et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Définition :

Si $f \circ f = Id_E$ on dit que f est **involutive**.

Remarque : si f est involutive alors f est bijective et $f^{-1} = f$.

c) Restriction et prolongement

Définitions : Soit f une application de E vers F

- Soit A une partie de E , l'application $g : A \rightarrow F$ définie par $\forall x \in A, g(x) = f(x)$ est appelée **restriction** de f à A et est notée $f|_A$.
- Soit E' une partie contenant E , l'application $h : E' \rightarrow F$ définie par $\forall x \in E, h(x) = f(x)$ est appelée **prolongement** de f à E' .

d) Images directes ou réciproques de parties par une application

Définition : Soit f une application de E vers F .

- Pour toute partie A de E on définit l'image directe de A par f , noté $f(A)$, par :

$$f(A) = \{f(x) / x \in A\}.$$
- Pour toute partie B de F on définit l'image réciproque de B par f , noté $f^{-1}(B)$, par :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}.$$

Proposition : Soit f une application de E vers F .

- On a pour toutes parties A et B de E :

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \text{ et } f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$
- On a pour toutes parties A' et B' de F :

$$f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B'), f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B') \text{ et } f^{-1}(\overline{A'}) = \overline{f^{-1}(A')}.$$
- Soit A une partie de E et A' une partie de F , on a :

$$A \subset f^{-1}(f(A)) \text{ et } f(f^{-1}(A')) \subset A'.$$

Remarque : Soient $A \subset E$ et $f : E \rightarrow E$.

On dit que A est **stable** par f si $f(A) \subset A$

invariant par f si $f(A) = A$

II. Lois de composition interne

a) Définitions

Définitions :

- On appelle **loi de composition interne** sur un ensemble E ou **opération** dans E toute application de $E \times E$ dans E . Une l.c.i. est souvent notée $*$: $E \times E \rightarrow E$

$$(x, y) \mapsto x * y$$
- On appelle **magma** tout couple $(E, *)$ où E est un ensemble et $*$ est une l.c.i.

Définition : Soit $(E, *)$ un ensemble muni d'une l.c.i. $*$, on dit que :

- la loi $*$ est **associative** si $\forall (a, b, c) \in E^3, a * (b * c) = (a * b) * c$
- la loi $*$ est **commutative** si $\forall (a, b) \in E^2, a * b = b * a$
- si deux éléments a et b de $(E, *)$ vérifient $a * b = b * a$ on dit qu'ils **commutent**.

Définition : Soit $(E, *, \perp)$ un ensemble muni de 2 l.c.i. On dit que :

- la loi \perp est **distributive à gauche** par rapport à la loi $*$ si
$$\forall (a,b,c) \in E^3, a \perp (b * c) = (a \perp b) * (a \perp c)$$
- la loi \perp est **distributive à droite** par rapport à la loi $*$ si
$$\forall (a,b,c) \in E^3, (b * c) \perp a = (b \perp a) * (c \perp a)$$
- la loi \perp est **distributive** par rapport à la loi $*$ si elle l'est à droite et à gauche

b) Eléments particuliers

Définition : Soit $(E, *)$ un magma, on dit que :

- E admet un **élément neutre à gauche** si $\exists e \in E, \forall x \in E, e * x = x$
- E admet un **élément neutre à droite** si $\exists e \in E, \forall x \in E, x * e = x$
- E admet un **élément neutre** si $\exists e \in E, \forall x \in E, x * e = e * x = x$

Définition :

On appelle **monoïde** tout magma $(E, *)$ tel que la loi $*$ est associative et E admet un élément neutre e .

Propositions : Soit $(E, *)$ un magma.

- Dans $(E, *)$ si e, e' sont respectivement neutres à gauche et à droite alors $e = e'$
- Si $(E, *)$ admet un élément neutre alors il est unique

Définition :

Soit $(E, *)$ un magma d'élément neutre e . On dit que $x \in E$ admet un **symétrique** s'il existe $x' \in E$ tel que $x * x' = x' * x = e$

Remarque : si x admet un symétrique on dit que x est symétrisable (ou inversible)
ce symétrique est souvent noté x^{-1} ($-x$ pour l'addition)

Propositions : Soit $(E, *)$ un **monoïde**.

- Si a est un élément symétrisable de E , alors son symétrique est unique.
- Soient a et b deux éléments de E symétrisables.
Alors $a * b$ est symétrisable et $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$

Définition : Soit $(E, *)$ un ensemble muni d'une l.c.i. $*$, on dit que :

- $a \in E$ est **régulier à droite** si $\forall (x,y) \in E^2, x * a = y * a \Rightarrow x = y$
- $a \in E$ est **régulier à gauche** si $\forall (x,y) \in E^2, a * x = a * y \Rightarrow x = y$
- $a \in E$ est **régulier** s'il est régulier à droite et à gauche

Remarque : dans (\mathbb{R}, \times) 0 n'est pas un élément régulier.

Proposition :

Tout élément symétrisable est régulier.