

AL.2
LOGIQUE - ELEMENTS DE LA
THEORIE DES ENSEMBLES

I. ELEMENTS DE LOGIQUE

a) Propositions - Règles logiques

Définition :

On appelle **propriété** ou **assertion** une affirmation à laquelle on peut attacher une valeur de vérité : soit **vraie** soit **fausse**.

Soit p une assertion, on appelle table de vérité de p la table :

P
V
F

Définition :

|| Un **théorème** ou **proposition** est une assertion vraie.

Règles logiques : on admet les règles suivantes

- Principe de non contradiction : on ne peut avoir p vrai et p faux en même temps
- Principe du tiers exclu : une proposition qui n'est pas vraie est fausse et une proposition qui n'est pas fausse est vraie.

b) Opérateurs logiques

Les opérateurs logiques permettent de combiner des propositions pour en obtenir de nouvelles :

- **Négation** : la négation d'une proposition p est notée non p ; $\neg p$; \bar{p}
- **Conjonction** : ' et ' notée \wedge
- **Disjonction inclusive** : ' ou ' notée \vee
- **Implication** : notée \Rightarrow
- **Equivalence** : notée \Leftrightarrow

Ils sont définis par la table de vérité :

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	F
F	V	V	V	F	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Remarques :

- Dans l'implication $p \Rightarrow q$, p s'appelle **l'hypothèse** et q la **conclusion**.
- On peut exprimer l'implication $p \Rightarrow q$ de l'une des façons suivantes :
 - i) Pour que p , il faut q ; q est une condition nécessaire de p
 - ii) Pour que q , il suffit p ; p est une condition suffisante pour q
 - iii) Si p , alors q .
- On peut exprimer l'équivalence logique $p \Leftrightarrow q$ de l'une des façons suivantes :
 - i) Pour que p , il faut et il suffit q
 - ii) p est une condition nécessaire et suffisante (CNS) pour q
 - iii) p si et seulement si q

c) Tautologie**Définition :**

Un théorème de logique (appelé aussi **tautologie**) est une assertion vraie quelles que soient les valeurs de vérité des éléments qui la composent.

Exemples de tautologies :

1. $p \Rightarrow p$
2. $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$
3. $p \vee (\neg p)$ (*tiers exclus*)
4. $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$ (*règle d'inférence*, ou *sylogisme*)

5. Lois de Morgan :

- a) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
- b) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
- c) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- d) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

6. L'implication :

- $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$
- $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ *contraposée*

7. Négation d'une implication : $\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \text{ et } \neg q)$

Remarque : l'implication $q \Rightarrow p$ est appelée réciproque de $p \Rightarrow q$

d) Principaux types de raisonnements

- 1. Transitivité :** de $(p \Rightarrow q)$ vraie et $(q \Rightarrow r)$ vraie on déduit que $(p \Rightarrow r)$ vraie.
- 2. Syllogisme :** de p vraie et $p \Rightarrow q$ vraie on déduit que q est vraie
- 3. Disjonction des cas :** de $[(p \Rightarrow q)$ vrai et $(\neg p \Rightarrow q)$ vraie] on déduit que q est vraie
- 4. Contraposition :** on sait que $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$
- 5. Raisonnement par l'absurde :** Pour montrer que $p \Rightarrow q$ est vraie, on suppose que p est vraie et q fausse, et on montre que cela entraîne une contradiction ; car dans une théorie logique, une proposition ne peut être à la fois vraie et fausse (s'il en est ainsi la théorie est dite contradictoire) ; ce raisonnement par l'absurde utilise le résultat suivant :
 $(p \Rightarrow q)$ vraie équivaut à $(\neg p \text{ ou } q)$ vraie soit $(p \text{ et } \neg q)$ fausse
- 6. Méthode du contre exemple :** pour montrer que $p \Rightarrow q$ est faux , il suffit d'exhiber un cas où p est vrai et q est faux . (négation d'une implication)

II. QUANTIFICATEURS

Soit P une proposition dépendant d'une variable x . On introduit 2 nouveaux opérateurs :

\forall : se lit « **quel que soit** » ou « **pour tout** »

\exists : se lit « **il existe au moins un** »

$\exists !$: se lit « **il existe un unique** »

a) Ordre des quantificateurs :

2 quantificateurs de même nature peuvent être permutés

2 quantificateurs de natures différentes ne peuvent pas être permutés.

b) Négation d'une phrase quantifiée :

Soit P une proposition dépendant d'une variable x et E un ensemble, alors :

$$\neg(\forall x \in E, P) \Leftrightarrow (\exists x \in E, \neg P)$$

$$\neg(\exists x \in E, P) \Leftrightarrow (\forall x \in E, \neg P)$$

III. ENSEMBLES**Définition :**

|| On appelle ensemble une collection d'objets.

a) Inclusions**Définition :**

|| Soient A et B 2 ensembles. On dit que A est **inclus** dans B ou que A est une **partie** de B si pour tout x de A, x est élément de B ($\forall x \in A, x \in B$). On note alors $A \subset B$.

|| On note $\mathcal{P}(A)$ l'ensemble des parties de A.

Remarques :

- $A \subset B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$; on a $\emptyset \subset A$, $A \subset A$ pour tout ensemble A.
- $A = B \Leftrightarrow (A \subset B \text{ et } B \subset A)$.
- La négation de $A \subset B$ est notée $A \not\subset B$ ceci veut dire : $\exists x \in A, x \notin B$.
- $A \neq B \Leftrightarrow (A \not\subset B) \text{ ou } (B \not\subset A)$.
- $(A \subset B \text{ et } B \subset C) \Rightarrow (A \subset C)$ transitivité

b) Opérations dans $\mathcal{P}(E)$ **Définitions :**

|| Soient E un ensemble, A et B des parties de E :

$C_E(A) = \{x \in E, x \notin A\}$ **complémentaire** de A dans E

$A \cap B = \{x \in E, x \in A \text{ et } x \in B\}$ **intersection** de A et B

$A \cup B = \{x \in E, x \in A \text{ ou } x \in B\}$ **réunion** de A et B

$A \setminus B = \{x \in A, x \notin B\} = A \cap C_E(B)$ **différence** A moins B

$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ **différence symétrique** de A et B

Propriétés : lois de Morgan

- La réunion et l'intersection de 2 ensembles sont commutatives et associatives.
- Elles sont également distributives l'une par rapport à l'autre :
 $\overline{A \cap (B \cup C)} = (\overline{A \cap B}) \cup (\overline{A \cap C})$ et $\overline{A \cup (B \cap C)} = (\overline{A \cup B}) \cap (\overline{A \cup C})$.
- $\overline{\overline{A \cap B}} = \overline{\overline{A}} \cup \overline{\overline{B}}$
- $\overline{\overline{A \cup B}} = \overline{\overline{A}} \cap \overline{\overline{B}}$

Remarque : soit $(E_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille de parties de E, on note :

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i = \{x \in E / \exists i \in \mathbb{N}, x \in E_i\} \text{ et } \bigcap_{i \in \mathbb{N}} E_i = \{x \in E / \forall i \in \mathbb{N}, x \in E_i\}$$

c) Partitions**Définition :**

$I \subset \mathbb{N}$ $(E_i)_{i \in I}$ une famille de parties d'un ensemble E est une **partition** de E si :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bigcup_{i \in I} E_i = E \\ \forall (i, j) \in I^2 / i \neq j, \quad E_i \cap E_j = \emptyset \\ \forall i \in I, \quad E_i \neq \emptyset \end{array} \right.$$

d) Produit cartésien**Définition :**

Soient E et F deux ensembles. On appelle **produit cartésien** de E et F l'ensemble

$$E \times F = \{ x = (x_1, x_2), x_1 \in E, x_2 \in F \}$$

Remarque : cette définition s'étend au produit cartésien d'une famille d'ensembles.

IV. RELATIONS**a) Définitions****Définition :**

Soient E et F deux ensembles, on appelle **relation binaire** \mathcal{R} de E vers F

un triplet (E, F, G) où G est une partie de $E \times F$ (appelé *graphe* de la relation)

pour $x \in E, y \in F$, on note $x \mathcal{R} y$ lorsque $(x, y) \in G$

Remarque : si $E = F$ une relation binaire \mathcal{R} de E vers E est dite relation dans E .

Définitions :

Soit \mathcal{R} une relation dans un ensemble E . On dit que :

\mathcal{R} est **réflexive** si $\forall x \in E \quad x \mathcal{R} x$

\mathcal{R} est **symétrique** si $\forall (x, y) \in E^2 \quad x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$

\mathcal{R} est **transitive** si $\forall (x, y, z) \in E^3, (x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} z) \Rightarrow x \mathcal{R} z$

\mathcal{R} est **antisymétrique** si $\forall (x, y) \in E^2, (x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} x) \Rightarrow x = y$

b) Relation d'équivalence**Définition :**

Soit \mathcal{R} une relation dans un ensemble E . On dit que \mathcal{R} est une **relation d'équivalence** si elle est réflexive, symétrique et transitive.

Remarque : soient \mathcal{R} une relation d'équivalence sur E et $x \in E$.

$\bar{x} = \{ y \in E, y \mathcal{R} x \}$ est appelé classe d'équivalence de x .

L'ensemble des classes d'équivalence forme une partition de E appelé ensemble quotient de E par \mathcal{R} et noté E / \mathcal{R} .

c) Relation d'ordre**Définition :**

Soit \mathcal{R} une relation dans un ensemble E . On dit que \mathcal{R} est une **relation d'ordre** si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.