

AL.1 Les Nombres Complexes

I. L'ensemble des nombres complexes \mathbb{C} :

a) Forme algébrique

Définition : Tout nombre complexe z s'écrit sous la forme dite algébrique :

$$z = x + iy \text{ où } x, y \text{ sont des réels et } i \text{ tel que } i^2 = -1.$$

x est appelé *partie réelle* de z , on note $x = \operatorname{Re}(z)$

y est appelé *partie imaginaire* de z , on note $y = \operatorname{Im}(z)$.

Remarques :

- L'ensemble des nombres complexes est noté \mathbb{C} .
- $z = z' \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z')$ et $\operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z')$.
- si $y = 0$ on dit que z est *réel*, si $x = 0$ on dit que z est un *imaginaire pur* ($z \in i\mathbb{R}$).

b) Représentation géométrique

Dans le plan \mathcal{P} muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ (appelé plan complexe)

- L'application de \mathbb{C} dans \mathcal{P} qui à $z = x + iy$ associe $M(x, y)$ est une *bijection*, on dit que z est l'**affixe** de M et que M est l'**image** de z , on note $M(z)$

$$x = \operatorname{Re}(z), \quad y = \operatorname{Im}(z)$$

- L'application de \mathbb{C} dans l'ensemble \mathcal{V} des vecteurs du plan qui à $z = x + iy$ associe $\vec{v}(x, y)$ est une *bijection*.

Remarque : Si $A(z_A)$ et $B(z_B)$ alors \vec{AB} a pour affixe $z_B - z_A$

c) Forme trigonométrique

Définition :

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe *non nul* et M son image dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

- on appelle *module* de z , noté $|z|$, le nombre réel positif $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$,
- la mesure θ de l'angle (\vec{e}_1, \vec{OM}) , définie à 2π près, est appelé *argument* de z et il est noté $\theta = \arg(z)$. On en donne généralement la détermination principale appartenant à $]-\pi, \pi]$.

II. Opérations sur les nombres complexes :

a) Corps des nombres complexes

On munit \mathbb{C} de deux opérations internes $+$ et \cdot définies par :

- $(x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$
- $(x + iy) \cdot (x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + yx')$

et d'une loi externe définie par : $a(x + iy) = ax + i(ay), \quad \forall a \in \mathbb{R}$.

Remarques :

- $z \cdot z' = z' \cdot z$
- $z \cdot z' = 0 \Rightarrow z = 0$ ou $z' = 0$

b) Conjugaison**Définition :**

Soit $z = x + iy$ (x, y réels), on définit le **conjugué** de z par $\bar{z} = x - iy$.

Propriétés 1 : $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$.

1. $\overline{\bar{z}} = z$
2. $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$
3. $\overline{z z'} = \bar{z} \bar{z}'$
4. si $z \neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$
5. si $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$
6. $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$
7. $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ et $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$
8. si $z = x + iy$ (x, y réels) alors $z \bar{z} = x^2 + y^2$.

Propriétés 2 : $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$.

1. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
2. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
3. $|z| = |-z| = |\bar{z}|$
4. $|z z'| = |z| |z'|$ et par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n, \left| \prod_{k=1}^n z_k \right| = \prod_{k=1}^n |z_k|$
5. $\forall z \in \mathbb{C}^*, \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$ et $\forall z' \in \mathbb{C}, \left| \frac{z'}{z} \right| = \frac{|z'|}{|z|}$
6. $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ et par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n, \left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|$
7. $||z| - |z'|| \leq |z - z'|$
8. Pour tous points A et B du plan complexe $AB = |z_B - z_A|$

c) Propriétés de l'argument**Propriétés :** $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^{*2}$

1. $\arg(z) = 0 [2\pi] \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}_+^*$
 $\arg(z) = \pi [2\pi] \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}_-^*$
 $\arg(z) = \pi/2 [\pi] \Leftrightarrow z$ est un imaginaire pur
2. $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) [2\pi]$ et $\arg(-z) = \arg(z) + \pi [2\pi]$
3. $\arg(z z') = \arg(z) + \arg(z') [2\pi], \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{*n}, \arg\left(\prod_{k=1}^n z_k\right) = \sum_{k=1}^n \arg(z_k) [2\pi]$
4. $\arg(1/z) = -\arg(z) [2\pi]$ et $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall z \in \mathbb{C}^*, \arg(z^n) = n \arg(z) [2\pi]$
5. $\arg(z/z') = \arg(z) - \arg(z') [2\pi]$

III. Interprétation géométrique des nombres complexes :

a) **Interprétation d'une différence**

Proposition : Soient A(a), B(b) , $A \neq B \Rightarrow (\vec{e}_1, \vec{AB}) = \arg(b - a) [2\pi]$

b) **Interprétation d'un rapport**

Proposition 1 : Soient A(a), B(b), C(c), D(d), $a \neq b, c \neq d$ alors
 $(\vec{AB}, \vec{CD}) = \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) [2\pi]$ et $\frac{CD}{AB} = \left| \frac{d-c}{b-a} \right|$.

Conséquences : Soient $A \neq B$ et $C \neq D$, alors :

$$(AB) // (CD) \Leftrightarrow \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) = 0 [\pi]$$

$$(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) = \pi/2 [\pi]$$

Proposition 2 : Soient A(a), B(b), C(c), D(d), 4 points 2 à 2 distincts :
 A, B, C, D sont cocycliques ou alignés $\Leftrightarrow \arg\left(\frac{d-a}{d-b}\right) = \arg\left(\frac{c-a}{c-b}\right) [\pi] \Leftrightarrow \frac{d-a}{d-b} : \frac{c-a}{c-b} \in \mathbb{R}^*$

c) **Applications** : étude des application suivantes :

- $z \mapsto a z + b$
- $z \mapsto \bar{z}$
- $z \mapsto \frac{1}{z}$

IV. Puissances et racines nième :

a) **Exponentielle d'un imaginaire pur**

$\forall \theta \in \mathbb{R}$, on note $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$; on obtient les propriétés suivantes :

Propriétés : $\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$,

- $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} e^{i\theta'}$; $e^{i\theta}/e^{i\theta'} = e^{i(\theta-\theta')}$
- $n \in \mathbb{Z}$, $(e^{i\theta})^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = e^{in\theta}$ (formule de Moivre)
- $\overline{(e^{i\theta})} = e^{-i\theta}$; $-e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$
- $e^{i\theta} = 1 \Leftrightarrow \theta \in 2\pi\mathbb{Z}$.
- $\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$; $\sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$ (formules d'Euler)

Théorème : l'ensemble U des nombres complexes de module 1 est stable pour la multiplication.

b) **Racine n^{ième} d'un nombre complexe non nul**

Définition :

$n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{C}$ on dit que $z \in \mathbb{C}$ est **une racine n^{ième}** de a si $z^n = a$

Théorème : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, tout complexe non nul $z = \rho e^{i\theta}$ ($\rho = |z|, \theta = \arg(z) [2\pi]$) admet n racines $n^{\text{ièmes}}$ $z_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})}$ où $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

Remarques :

- les images ponctuelles des racines $n^{\text{ièmes}}$ de z sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans un cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{\rho}$
- d'après ce qui précède 1 possède n racines $n^{\text{ièmes}}$ ($n \geq 2$) $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

Proposition : $\forall n \in \mathbb{N} / n \geq 2$:

- l'ensemble des racines $n^{\text{ièmes}}$ de 1, $U_n = \{z \in \mathbb{C} / z^n = 1\}$, est stable pour la multiplication.
- la somme des n racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité est nulle.

1) racines carrées : Soient $Z = x + iy / (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $z = a + ib / (a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$z^2 = Z \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = x \\ 2ab = y \\ a^2 + b^2 = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

2) Résolution d'équations du second degré dans \mathbb{C}

Soit l'équation (E) : $az^2 + bz + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{C}^3, a \neq 0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$)
 $\Delta = b^2 - 4ac$ (discriminant) et δ tel que $\delta^2 = \Delta$

- si $\Delta \neq 0$ alors (E) a 2 solutions distinctes $z_1 = \frac{-b - \delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}$
- si $\Delta = 0$ alors (E) a une seule solution (double) $z_1 = z_2 = \frac{-b}{2a}$

V. Applications trigonométriques des nombres complexes

a) Développement de $\cos nx, \sin nx$ et $\tan nx$

$$\begin{aligned} \cos nx &= \sum_{0 \leq 2k \leq n} (-1)^k C_n^{2k} \cos^{n-2k}(x) \sin^{2k}(x) \\ \sin nx &= \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} (-1)^k C_n^{2k+1} \cos^{n-2k-1}(x) \sin^{2k+1}(x) \end{aligned}$$

En cas d'existence :

$$\tan nx = \frac{\sin(nx)}{\cos(nx)} = \frac{\sin(nx)/\cos^n x}{\cos(nx)/\cos^n x} = \frac{\sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} (-1)^k C_n^{2k+1} \tan^{2k+1} x}{\sum_{0 \leq 2k \leq n} (-1)^k C_n^{2k} \tan^{2k} x}$$

b) Linéarisation de $\cos^n x, \sin^n x$ et $(\cos^n x)(\sin^p x)$

$$\cos^n x = \left(\frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})\right)^n \quad \text{et} \quad \sin^n x = \left(\frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})\right)^n$$