AL 6 - Formes quadratiques - Applications

E désigne un espace euclidien.

I. Réduction des formes quadratiques

a) Formes bilinéaires symétriques

Définition 1 : La matrice A= $[a_{i,j}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de terme général $a_{i,j} = \varphi(e_i, e_j)$ est appelé matrice de φ sur la base B = $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$.

b) Changement de base

Soient e, e' deux bases de E. $A_{e'} = {}^tP.A_e.P$.

c) Formes quadratiques

Définition 2 : Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur ExE. On appelle *forme quadratique associée* à φ, l'application, notée q, de E dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in E,\ q(x) = \varphi(x, x) = {}^tXAX\ .$$

Proposition 1: Soient φ une forme bilinéaire symétrique sur ExE et q la forme quadratique associée à φ . On a :

1 $\forall (x, y) \in E^2$, $q(x + y) = q(x) + q(y) + 2\varphi(x, y)$

2 $\forall (x, y) \in E^2$, $\varphi(x, y) = \frac{1}{2}(q(x + y) - q(x) - q(y))$ *forme polaire de q*

3 $\forall (x, y) \in E^2$, $\varphi(x, y) = \frac{1}{4}(q(x + y) - q(x - y))$ *forme polaire de q*

Définition 2: Soit une application q: $E \to \mathbb{R}$. On dit q est une *forme quadratique* s'il existe une forme bilinéaire symétrique φ sur ExE telle que φ est une forme bilinéaire symétrique sur ExE associée à q.

Proposition 2 : Soit q une forme quadratique sur E. On a :

$\forall \lambda \in K,\ \forall x \in E,\ q(\lambda x) = \lambda^2 q(x).$

d) Réduction des formes quadratiques

Théorème 1: Pour toute forme bilinéaire symétrique φ sur ExE, il existe au moins une base de E orthogonale pour φ.

Théorème 2: Réduction de Gauss

Toute forme quadratique sur E est décomposable, d'au moins une façon, en une combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.

II. Coniques – Quadriques - Equations réduites

a) formulaire sur les coniques

Définition 1 : Soient un point F, une droite $\mathcal{D}$ ne passant pas par F et un réel e>0.

On appelle conique de foyer F, de directrice $\mathcal{D}$ et d'excentricité e, l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M du plan vérifiant : MF = e. d(M, $\mathcal{D}$). On distingue trois cas :

1. 0<e<1 : $\mathcal{C}$ est une *ellipse*
2. e = 1 : $\mathcal{C}$ est une *parabole*
3. e>1 : $\mathcal{C}$ est une *hyperbole*

i- <u>Equation cartésienne d'une conique :</u> Soit la conique $\mathcal{C}$ de foyer F, de directrice $\mathcal{D}$ et d'excentricité e, d = d(F, $\mathcal{D}$). Soit $\vec{j}$ vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

Dans le repère orthonormal (F, $\vec{i},\vec{j}$), $\mathcal{C}$ a pour équation cartésienne : $x^2 + y^2 = e^2(x - d)^2$.

ii- <u>Equation cartésienne d'une parabole :</u>

Soit $\mathcal{P}$ la parabole de paramètre p>0. Il existe un repère orthonormal (O, $\vec{i},\vec{j}$) dans lequel $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne : $y^2 - 2px = 0$ où p = d(F, $\mathcal{D}$). On a alors $\overrightarrow{OF} = \frac{p}{2}\vec{i}$ et $\mathcal{D}$: $x = -\frac{p}{2}$.

iii- <u>Equation cartésienne d'une ellipse :</u>

Soit $\mathcal{E}$ une ellipse. Il existe un repère orthonormal (O, $\vec{i},\vec{j}$) dans lequel $\mathcal{E}$ a pour équation cartésienne : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, (0<b<a).

Réciproquement, la courbe d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, (0<b<a), est une ellipse de foyer $F=O+c\,\vec{i}\;(c=\sqrt{a^2-b^2})$ de directrice $\mathcal{D}$: $x = \frac{a^2}{c}$, d'excentricité $e = \frac{c}{a}$.

Le point O est centre de symétrie de $\mathcal{E}$, appelé centre de l'ellipse.

E admet deux foyers $F = O + c\,\vec{i}$ et $F' = O - c\,\vec{i}\;(c=\sqrt{a^2-b^2})$ et deux directrices d'équations :

$\mathcal{D}$: $x=\frac{a^2}{c}$, $\mathcal{D}'$: $x = -\frac{a^2}{c}$.

iv- <u>Equation cartésienne d'une hyperbole :</u>

Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole. Il existe un repère orthonormal (O, $\vec{i},\vec{j}$) dans lequel $\mathcal{H}$ a pour équation cartésienne : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, (a>0, b>0)

Réciproquement, la courbe d'équation $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, (a>0, b>0), est une hyperbole de foyer $F=O + c\,\vec{i}\;(c=\sqrt{a^2+b^2})$ de directrice $\mathcal{D}$: $x = \frac{a^2}{c}$, d'excentricité $e = \frac{c}{a}$.

Le point O est centre de symétrie de $\mathcal{H}$, appelé centre de l'hyperbole.

$\mathcal{H}$ admet deux foyers $F = O + c\,\vec{i}$ et $F' = O - c\,\vec{i}\;(c=\sqrt{a^2+b^2})$ et deux directrices

$\mathcal{D}$: $x = \frac{a^2}{c}$ et $\mathcal{D}'$: $x = -\frac{a^2}{c}$.

b) <u>Réduction d'une conique</u>

Définition 2 : Si dans un repère (O ; $\vec{i},\vec{j}$) du plan, une courbe admet une équation de la forme f(x, y) = 0 où f est un polynôme de degré 2 (i.e. $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 +2dx + 2ey + k$), il en est de même dans tout autre repère. On dit que $\mathcal{C}$ est une conique.

1. $ax^2 + 2bxy + cy^2$ est appelée partie quadratique de l'équation.
2. $2dx + 2ey$ est appelée partie linéaire de l'équation.

3 On note $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ la matrice de la forme bilinéaire symétrique associée à la partie quadratique.

<u>Théorème</u> 1 : Si rg(A) = 2, la courbe $\mathcal{C}$ a un centre de symétrie $\Omega(x_0, y_0)$ et un seul.
Dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$, $\mathcal{C}$ a pour équation : $ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2 + f(x_0, y_0) = 0$

<u>Remarque</u> : $\Omega(x_0, y_0)$ centre de symétrie $\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(\Omega)=\frac{\partial f}{\partial y}(\Omega)=0$

<u>Nature d'une conique</u> : Soit $\mathcal{C}$ la conique d'équation : $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + k = 0$.
<u>Interprétation matricielle</u> : On peut écrire cette équation sous la forme :

$$^tV.A.V + L.V + k = 0 \text{ où } V=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; L=\begin{pmatrix} 2d, & 2e \end{pmatrix}.$$

<u>Equation réduite d'une conique</u> : Comme A est symétrique et réelle, alors elle est diagonalisable dans une b.o.n. et on a : $A=P.D.^tP$ où $P\in O(2)$ et $D=\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.

Dans cette base, $\mathcal{C}$ a pour équation : $^tV'.D.V'+L.P.V'+k=0$ avec $V = P.V'$;
Si $V'=\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, alors l'équation de $\mathcal{C}$ est de la forme : $\lambda X^2 + \mu Y^2 + d'X + e'Y + k = 0$, alors :

1 Si $ac - b^2 > 0$, alors $\lambda\mu > 0$ et on dit que $\mathcal{C}$ est du type ellipse
2 Si $ac - b^2 < 0$, alors $\lambda\mu < 0$ et on dit que $\mathcal{C}$ est du type hyperbole
3 Si $ac - b^2 = 0$, alors $\lambda\mu = 0$ et on dit que $\mathcal{C}$ est du type parabole.

c) <u>Quadrique</u>

Définition 3 : On appelle quadrique de E toute surface $\mathcal{Q}$ possédant dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une équation du type :

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Iz + J = 0 \quad (*)$$

Définition 4 :
Soit une équation du type : $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Iz + J = 0$.
1- $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz$ est appelée partie quadratique de l'équation.
2- $2Gx + 2Hy + 2Iz$ est appelée partie linéaire de l'équation.

Remarque : Si on note $M=\begin{pmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{pmatrix}$ la matrice de la forme bilinéaire symétrique associée à la partie quadratique, alors la matrice M est symétrique réelle, donc diagonalisable à l'aide d'un changement de b.o.n. M est donc semblable à une matrice diagonale

$$D=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

i-Quadriques à centre :

Théorème 2: Si rg(M) = 3, la surface $\mathcal{Q}$ a un centre de symétrie $\Omega(x_0, y_0, z_0)$ et un seul.
Dans un repère orthonormé $\mathcal{Q}$ a une *équation réduite* de l'un des types suivants :

- $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ *Ellipsoïde*
- $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ *Hyperboloïde à une nappe*
- $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ *Hyperboloïde à 2 nappes*
- $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ *Cône elliptique*

Remarque : $\Omega(x_0, y_0, z_0)$ centre de symétrie $\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(\Omega)=\frac{\partial f}{\partial y}(\Omega)=\frac{\partial f}{\partial z}(\Omega)=0$

ii-Autres quadriques :

Cas rg(M) = 2 M n'étant pas inversible, il existe $P\in O(3)$ et D une matrice diagonale telle que $M = PDP^{-1}$. On peut, quitte à permuter les rôles de x, y et z, se ramener au cas où l'on a :

$D=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $ab \neq 0$.

Théorème 3 : Si rg(A) = 2, la surface $\mathcal{Q}$ possède dans un repère orthonormé une équation réduite de l'un des types suivants :

1- $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{2z}{c}$ *Paraboloïde elliptique*

2- $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{2z}{c}$ *Paraboloïde hyperbolique « selle de cheval »*

3- $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ *Cylindre elliptique*

4- $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ *Cylindre hyperbolique*

Cas rg(M) = 1 Il existe $P \in O(3)$ et D une matrice diagonale telle que $M = PDP^{-1}$.

On peut, quitte à permuter les rôles de x, y et z, se ramener au cas où $D=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

avec $a \neq 0$.
On omet dans le théorème suivant, les cas triviaux où $\mathcal{Q}$ est un plan ou une réunion de 2 plans :

Théorème 4 : Si rg(A) = 1, la surface $\mathcal{Q}$ possède dans un repère orthonormé une équation réduite : $x^2 = 2py$ *Cylindre parabolique*