AL 5 - Espaces Euclidiens

I. Généralités

Définition :

Un *espace euclidien* est un espace préhilbertien réel de dimension finie non nulle.

Proposition 1 :

- Un espace euclidien admet au moins une base orthonormée (b.o.n).
- Toute famille orthonormée d'un espace euclidien peut être complétée en une b.o.n.

Proposition 2 :

Si B = $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une b.o.n d'un espace euclidien E alors $\forall x \in E$, $x=\sum_{i=1}^{n}(x\,|\,e_i)e_i$.

Soit B = $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une b.o.n d'un espace euclidien E. Notons : $\forall (x, y)\in E^2$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$,

$$X = \mathrm{Mat}_B(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \mathrm{Mat}_B(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Proposition 3 : Soit E espace euclidien, alors :

$$\forall (x, y)\in E^2,\ (x\,|\,y)=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = {}^tXY \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = {}^tXX.$$

II. Groupe orthogonal

Dorénavant, E désigne un espace euclidien de dimension n.

a) Automorphisme orthogonal

Définition 1 :

Un endomorphisme f de E est appelé *automorphisme orthogonal* si $\forall x\in E$, $\|f(x)\| = \|x\|$.

Proposition 1 : Soit f un endomorphisme orthogonal alors :

1. $\forall (x, y)\in E^2$, $(f(x)\,|\,f(y)) = (x\,|\,y)$
2. f transforme toute b.o.n de E en une b.o.n de E
3. f est un automorphisme de E
4. $\forall (x, y)\in E^2$, $(f(x)\,|\,y) = (x\,|\,f^{-1}(y))$
5. Si e est une b.o.n. alors : $M_e(f) = {}^tM_e(f^{-1})$.
6. $\det(f) = \pm 1$

Notations :

- On note O(E) l'ensemble des automorphismes orthogonaux de E.
- L'ensemble $\{ f \in O(E) / \det(f)= +1\}$ est noté $O^+(E)$.
- L'ensemble $\{ f \in O(E) / \det(f)= -1\}$ est noté $O^-(E)$.

Proposition 2 :

O(E) est un groupe pour la loi o.
$O^+(E)$ est un sous groupe de O(E).

Définition 2 :

- O(E) est appelé *groupe orthogonal* de E.
- $O^+(E)$ est appelé *groupe spécial orthogonal* de E. On le note aussi SO(E).

<u>Proposition</u> 3 : Si $f \in O(E)$, alors ses seules valeurs propres possibles sont –1 et 1.

b) <u>Matrices orthogonales</u>

Définition 3 :

Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *matrice orthogonale* si ${}^tM.M = I_n$.
On note O(n) l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

<u>Proposition</u> 4 :

Soient f un endomorphisme de E et M la matrice de f dans une base orthonormée de E.
Les conditions suivantes sont équivalentes :

- f est un automorphisme orthogonal de E.
- M est une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

<u>Remarques :</u>

- $M \in O(n)$ ssi M est inversible et $M^{-1} = {}^tM$
- $M \in O(n)$ ssi ses vecteurs colonnes (resp. ses vecteurs lignes) forment une b.o.n. de $\mathbb{R}^n$.
- si $M \in O(n)$ alors $\det(M) = \underline{+}1$.
- si $M \in O(n)$, ses seules valeurs propres possibles sont –1 et 1.

Notations :

- L'ensemble $\{ M \in O(n) / \det(M)=1\}$ est noté $O^+(n)$ ou encore SO(n).
- L'ensemble $\{ M \in O(n) / \det(M)= -1\}$ est noté $O^-(n)$.

Rappels de Sup :

c) <u>Etude de O(n)</u>

i- <u>*Cas n = 2*</u>

<u>Proposition</u> 5 :

$O^+(2)$ est l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ $(\theta \in \mathbb{R})$: matrice d'une rotation vectorielle d'angle θ.

$O^-(2)$ est l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ $(\theta \in \mathbb{R})$: matrice d'une symétrie orthogonale par rapport à la droite vectorielle dirigée par le vecteur $u\left(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\right)$.

i- <u>*Cas n = 3*</u>

<u>Théorème 1</u> : Soit $f \in O^+(E)\backslash\{Id_E\}$, alors f est une rotation d'axe dirigée par un vecteur u vérifiant $Ker(f - Id_E) = \mathbb{R}u$ et d'angle $\theta \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$ unique à 2π près telle que dans une base orthonormée directe (u, v, w) on a : $\mathrm{Mat}_{(u,v,w)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

<u>Théorème 2</u> : Soit $f \in O^-(E)$, alors deux cas possibles peuvent se présenter :

- $Ker(f - Id_E) \neq \{0_E\}$ alors f est la symétrie orthogonale par rapport au plan $E_1 = Ker(f - Id_E)$.
- $Ker(f - Id_E) = \{0_E\}$ alors f est la composée commutative d'une rotation $R(u, \theta)$ d'axe dirigé par un vecteur u vérifiant $Ker(f + Id_E) = \mathbb{R}u$ et d'angle $\theta \in \mathbb{R} \backslash 2\pi\mathbb{Z}$ unique à 2π près et d'une symétrie orthogonale par rapport au plan $(\mathbb{R}u)^\perp$ (f est appelé anti-rotation).

<u>Proposition 6</u> :

- Expression vectorielle d'une rotation $R(u,\theta)$:

$$\forall x \in E,\ R(u,\theta) = x \cos\theta + (1 - \cos\theta)(u/x)u - (u \wedge x) \sin\theta$$

- Expression vectorielle d'une anti-rotation $R(u,\theta)oS = So\,R(u,\theta)$:

$$\forall x \in E,\ R(u,\theta)oS = x \cos\theta + (1 + \cos\theta)(u/x)u - (u \wedge x) \sin\theta$$

III. <u>Endomorphismes symétriques</u>

Définition :

Soit f un endomorphisme de E. On dit que f est un **endomorphisme symétrique** si :
$\forall (x, y) \in E^2,\ (f(x) \mid y) = (x \mid f(y))$.

<u>Proposition</u> 1 :

Pour toute matrice M réelle carrée de dimension n, on a :
$\forall (X,Y) \in \mathbb{R}^n, (MX \mid Y) = \left(X \mid {}^tMY\right)$

<u>Proposition</u> 2 : Caractérisation matricielle

L'endomorphisme f est symétrique si et seulement si sa matrice dans une b.o.n est symétrique.

<u>Proposition</u> 3 :

Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme symétrique réel (resp. d'une matrice symétrique réelle) est scindé sur $\mathbb{R}$.

<u>Théorème</u> :

Tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien réel E (resp. $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique) est diagonalisable. Plus précisément, il existe une b.o.n. de E formée de vecteurs propres (resp. il existe $P \in O(n)$ telle que $P^{-1}MP$ est diagonale).

<u>Remarque</u> :

Si $P \in O(n)$, alors $P^{-1} = {}^tP$, donc $P^{-1} M P = {}^tP M P$.