

Al 4 – Espaces préhilbertiens réels

E désigne un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension quelconque

I. Produit scalaire euclidien

a) Généralités

Définition 1 : Une application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée :

i) application *bilinéaire* si :

$$\forall (x, y, z) \in E^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \varphi(\lambda x + y, z) = \lambda \varphi(x, z) + \varphi(y, z) \text{ et } \varphi(z, \lambda x + y) = \lambda \varphi(z, x) + \varphi(z, y).$$

ii) application *symétrique* si : $\forall (x, y) \in E^2, \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$

iii) application *définie* si : $\forall x \in E, \varphi(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$.

iv) application *positive* si : $\forall x \in E, \varphi(x, x) \geq 0$.

Définition 2 : Une application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée *produit scalaire euclidien* sur E si

φ est une forme bilinéaire symétrique, définie positive.

Définition 3 : Un *espace préhilbertien réel* est un \mathbb{R} -espace vectoriel E de dimension

quelconque (finie ou non) muni d'un produit scalaire euclidien $(\cdot | \cdot)$, un tel espace est noté $(E, (\cdot | \cdot))$.

Théorème 1 : Soit $(E, (\cdot | \cdot))$ un espace préhilbertien réel et F un sous espace vectoriel de E . La restriction du produit scalaire euclidien à F est un produit scalaire euclidien.

b) Norme euclidienne : Soit E un espace préhilbertien réel.

Notation : $\forall x \in E$, on note $\|x\| = \sqrt{(x | x)}$

Conséquence : $\forall x \in E, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$.

Théorème 2 : Soient $(E, (\cdot | \cdot))$ un espace préhilbertien réel et (x, y) appartenant à E^2 .

i) $|(x | y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ (**Inégalité de Cauchy - Schwartz**), il y a égalité si, et seulement si l'un des deux vecteurs est nul ou les deux sont liés.

ii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (**Inégalité de Minkowski**), il y a égalité si, et seulement si l'un des deux vecteurs est nul ou les deux sont positivement liés.

Théorème 3 : Soit $(E, (\cdot | \cdot))$ un espace préhilbertien réel. L'application qui à tout vecteur x de E associe $\|x\| = \sqrt{(x | x)}$ est une norme sur E .

Formulaire : $\forall (x, y) \in E^2$,

i) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x | y)$

ii) $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x | y)$

iii) $(x | y) = \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$

iv) $(x / y) = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$.

II. **Orthogonalité** Soit $(E, (\cdot | \cdot))$ un espace préhilbertien réel

a) Définitions – Propriétés générales

Définition 1 :

Deux vecteurs x et y de E sont dits *orthogonaux* si : $(x | y) = 0$

Définition 2 :

Deux parties A et B de E sont dites *orthogonales* si : $\forall (x, y) \in A \times B, (x | y) = 0$.

Définition 3 :

L'orthogonale d'une partie A de E est l'ensemble : $A^\perp = \{x \in E / \forall y \in A, (x | y) = 0\}$.

Définition 4 : Soit I une partie de \mathbb{N} . Une famille $(u_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est dite :

- i) *orthogonale* si : $\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow (u_i | u_j) = 0$
- ii) *orthonormale* si : $\forall (i, j) \in I^2, (u_i | u_j) = \delta_{i,j}$ (symbole de Kronecker)

Propriété 1 : Soient E un espace préhilbertien réel, A et B deux parties de E.

- i) $A^\perp = \{x \in E / \forall y \in A, (x | y) = 0\}$ est un sous espace vectoriel de E.
- ii) $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$
- iii) $A^\perp = (\text{Vect } A)^\perp$
- iv) $A \subset A^{\perp\perp}$

Conséquence pratique : Soit F un sous espace vectoriel de E. Si $(u_i)_{i \in I}$ est une base de F, on a :

$$x \in F^\perp \Leftrightarrow \forall i \in I, (u_i | x) = 0.$$

Propriété 2 : Soient E un espace préhilbertien réel et F un sous espace vectoriel de E.

$$\text{On a } F^\perp \cap F = \{0_E\}.$$

Définition 5 : Soit F un sous espace vectoriel de E tel que $E = F \oplus F^\perp$.

On dit que le sous-espace vectoriel F^\perp est un *supplémentaire orthogonal* de F.

Propriété 3 :

- i) Toute famille orthogonale $(u_i)_{i \in I}$ de vecteurs non nuls de E est libre.
- ii) Si $(u_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ est une famille orthogonale de E, alors $\left\| \sum_{i=1}^p u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^p \|u_i\|^2$.

b) Supplémentaire orthogonal

1) **Cas :** $\dim E < \infty$

Théorème 1 : Soit E un espace préhilbertien réel de dimension finie (*espace euclidien*), pour tout sous espace vectoriel F de E, on a $E = F \oplus F^\perp$.

Théorème 2 :

Tout espace préhilbertien réel de dimension finie non nulle admet une base orthonormale.

Théorème 3 : Soit E un espace préhilbertien réel de dimension finie non nulle, toute famille orthonormale de E peut être complétée en une base orthonormale (bon) de E.

2) **Cas :** $\dim F < \infty$ et $\dim(E)$ quelconque.

Théorème 4 : Soit E un espace préhilbertien réel de dimension quelconque et $a \in E \setminus \{0_E\}$, alors :

$$E = \mathbb{R}a \oplus (\mathbb{R}a)^\perp.$$

Théorème 5 : Soit E un espace préhilbertien réel de dimension quelconque et F un sous espace vectoriel de dimension finie de E , alors : $E = F \oplus F^\perp$.

c) **Projection orthogonale sur un sous espace vectoriel de dimension finie**

Définition 6 : Soit F un sous espace vectoriel de dimension finie, on alors $E = F \oplus F^\perp$ et le projecteur de noyau F^\perp et d'image F est appelé *projection orthogonale* sur F .

Théorème 6 : Soit E un espace préhilbertien réel et $(e_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ une base orthonormée de F .

La projection P_F orthogonale sur F est définie par : $\forall x \in E, P_F(x) = \sum_{i=1}^p (x | e_i) e_i$.

d) **Orthogonalisation de Schmidt**

Théorème 7 : Soit E un espace préhilbertien réel et $(x_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une famille libre de E , alors il existe une famille orthogonale $(y_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ telle que : $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{vect}(x_1, \dots, x_j) = \text{vect}(y_1, \dots, y_j)$.

Corollaire :

Soit E un espace préhilbertien réel de dimension finie, alors il admet au moins une base orthonormée.