

Al 3 - Réductions

Dans ce chapitre $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , et E est un K -espace vectoriel

I. Valeurs propres et vecteurs propres

a) Sous espaces stables par un endomorphisme

Définition : Soit f un endomorphisme de E (on note $f \in \mathcal{L}(E)$) et F un sev de E .

On dit que F est *stable* par f si $f(F) \subset F$.

Proposition : Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

1. Si f et g commutent ($f \circ g = g \circ f$) alors $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sont stables par g .
2. Soit $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ une base de E . Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, notons $F_j = \text{Vect}(e_1, \dots, e_j)$.

La matrice de f dans B est :

- Diagonale \Leftrightarrow Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la droite vectorielle $\text{Ker } e_i$ est stable par f
- Triangulaire supérieure \Leftrightarrow Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, le sev F_j est stable par f

b) Endomorphisme stabilisant les sous espaces d'une somme directe

Proposition : On suppose que E est de dimension finie et que $E = F \oplus G$, F et G distincts de $\{0_E\}$. Soit B une base de E obtenue par juxtaposition des bases de F et de G et $M = \text{Mat}_B(f)$.

1. F est stable par $f \Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} \boxed{A} & \boxed{D} \\ \boxed{0} & \boxed{C} \end{pmatrix}$ où $A \in \mathcal{M}_{\dim F}(K)$.

2. F et G sont stables par $f \Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} \boxed{A} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{C} \end{pmatrix}$ où $A \in \mathcal{M}_{\dim F}(K)$ et $C \in \mathcal{M}_{\dim G}(K)$

c) Vecteurs propres et valeurs propres d'un endomorphisme

Définition : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in K$.

On dit que λ est une *valeur propre* de f s'il existe un vecteur non nul u de E tel que $f(u) = \lambda u$.

Un tel vecteur est appelé *vecteur propre*.

L'ensemble des valeurs propres éventuelles de f est appelé *spectre* de f , et il est noté $\text{Sp}(f)$.

Proposition : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

λ est une valeur propre de $f \Leftrightarrow (f - \lambda \text{id})$ n'est pas injectif

Définition : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et λ une valeur propre de f .

Le sev $E_\lambda = \text{Ker}(f - \lambda \text{id})$ est appelé *sous espace propre* de f associé à λ .

d) Vecteurs propres et valeurs propres d'une matrice

Définition : Soit $M \in \mathcal{M}_n(K)$ et $\lambda \in K$.

On dit que λ est une *valeur propre* de la matrice M s'il existe un vecteur colonne non nul U de K^n tel que $M.U = \lambda U$. Un tel vecteur U est appelé *vecteur propre*.

L'ensemble des vecteurs propres associés à une valeur propre donné λ engendre un espace vectoriel appelé *sous espace propre* et noté E_λ .

L'ensemble des valeurs propres éventuelles de M est appelé *spectre* de M , et il est noté $\text{Sp}(M)$.

Proposition : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

λ est une valeur propre de $M \Leftrightarrow \det(M - \lambda I_n) = 0$

e) Propriétés des éléments propres

Proposition : Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ une famille de p valeurs propres deux à deux distinctes .

Notons E_1, E_2, \dots, E_p les sous espaces propres correspondants.

Alors la somme $E_1 + E_2 + \dots + E_p$ est directe.

D'une manière équivalente :

Soit (u_1, u_2, \dots, u_p) une famille de p vecteurs propres deux à deux distincts . Alors, cette famille est libre.

Conséquence :

Si $\dim E = n$, alors $f \in \mathcal{L}(E)$ admet au plus n valeurs propres distinctes.

(On a un résultat analogue pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).

Proposition : Deux matrices semblables ont le même spectre.

II. Polynôme caractéristique Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.

a) Généralités

Définition : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (resp. $f \in \mathcal{L}(E)$). Le *polynôme caractéristique* de M (resp. de f), noté $\mathfrak{X}_M(X)$, est défini par : $\mathfrak{X}_M(X) = \det(M - X \cdot I_n)$ (resp. $\mathfrak{X}_f(X) = \det(f - X \text{id}_E)$).

Proposition :

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le polynôme caractéristique de M vérifie :

$$\mathfrak{X}_M(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} \text{tr}(M) X^{n-1} + \dots + \det M.$$

2. M et tM ont le même le polynôme caractéristique.

3. Deux matrices semblables ont le même le polynôme caractéristique.

b) Polynôme caractéristique et valeurs propres

Proposition : Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

λ est une valeur propre de $M \Leftrightarrow \lambda$ est racine du polynôme caractéristique \mathfrak{X}_M ;

λ est une valeur propre de $f \Leftrightarrow \lambda$ est racine du polynôme caractéristique \mathfrak{X}_f

Définition : Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (resp. $f \in \mathcal{L}(E)$) et $\lambda \in \mathbb{K}$.

On dit que λ est une *valeur propre* de M (resp. de f) *de multiplicité* k si λ est une racine de $\mathfrak{X}_M(X)$ (resp. $\mathfrak{X}_f(X)$) avec la multiplicité k . Cette multiplicité est noté $m(\lambda)$.

Proposition : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que :

- $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$.
- $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, le sev F_k n'est pas réduit à $\{0_E\}$.
- $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, le sev F_k est stable par f ; on note alors $g_k = f|_{F_k}$.

Alors : $\mathfrak{X}_f(X) = \mathfrak{X}_{g_1}(X) \dots \mathfrak{X}_{g_p}(X)$.

Proposition : Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, λ une valeur propre de f de multiplicité $m(\lambda)$ et $d(\lambda) = \dim E_\lambda$, alors :

$$m(\lambda) \geq d(\lambda) \geq 1$$

III. Endomorphismes et matrices diagonalisables

Soit E un K -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.

a) Polynômes d'endomorphismes ou de matrices

Définition :

Soient $f \in \mathfrak{L}(E)$ (resp. $M \in \mathfrak{M}_n(K)$) et $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k \in K[X]$.

On note $P(f) = \sum_{k=0}^p a_k f^k$ (resp. $P(M) = \sum_{k=0}^p a_k M^k$)

On dit que $P(f)$ (resp. $P(M)$) est **un polynôme de l'endomorphisme f (resp. de la matrice M)**.

Proposition : Soient $(\alpha, \beta) \in K^2$, $f \in \mathfrak{L}(E)$ et $(A, B) \in (K[X])^2$. On a :

$$(\alpha A + \beta B)(f) = \alpha A(f) + \beta B(f), \quad (AB)(f) = A(f).B(f) \text{ et } 1(f) = \text{id}_E.$$

Définition :

Soient $f \in \mathfrak{L}(E)$ et $P \in K[X]$ (resp. $M \in \mathfrak{M}_n(K)$).

Si $P(f) = 0_{\mathfrak{L}(E)}$ (resp. $P(M) = 0$), on dit que P est **un polynôme annulateur** de f (resp. de M).

Proposition : Si P est un polynôme annulateur de f , alors les valeurs propres de f sont racines de P (la réciproque est fautive).

Théorème : (Théorème de Cayley-Hamilton)

Le polynôme caractéristique de f est un polynôme annulateur de f .

b) Généralités

Proposition - Définition : Soit $f \in \mathfrak{L}(E)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(f)} E_\lambda$.
2. \mathfrak{X}_f est scindé dans $K[X]$ et $d(\lambda) = m(\lambda), \forall \lambda \in \text{Sp}(f)$.
3. $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} d(\lambda) = \dim E$.

4. Il existe une base de E dans laquelle f est diagonalisable.

Si l'une de ces quatre conditions est vérifiée, on dit que f est **diagonalisable**.

Définition : Soit $M \in \mathfrak{M}_n(K)$.

On dit que M est **diagonalisable** sur K , si l'endomorphisme de K^n qui lui est associé est diagonalisable.

c) Conditions de diagonalisabilité

Proposition 1 : (Condition suffisante)

Soient $f \in \mathfrak{L}(E)$ et $n = \dim(E)$. Si f admet n valeurs propres distinctes, alors f est diagonalisable.

Définition : Soit $f \in \mathfrak{L}(E)$ (resp. $M \in \mathfrak{M}_n(K)$). On appelle polynôme minimal de f (resp. de M)

le polynôme unitaire de plus petit degré α_f (resp. α_M) tel que $\alpha_f(f) = 0$ (resp. $\alpha_M(M) = 0$).

Proposition 2 : (Condition Nécessaire et Suffisante)

Soit $f \in \mathfrak{L}(E)$. f est diagonalisable si et seulement si α_f est scindé à racines simples.

Proposition 3 :

Si $f \in \mathfrak{L}(E)$ est diagonalisable, alors la restriction de f à un sev stable par f est diagonalisable.

IV. Applications

Calcul des puissances d'une matrice
Suites récurrentes linéaires

V. Trigonalisation E désigne toujours un K -espace vectoriel de dimension n .

Définition : Soit $f \in L(E)$.

|| On dit que f est trigonalisable s'il existe une base B de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure.

Proposition : CNS de trigonabilité

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $M \in \mathfrak{M}_n(K)$). f (resp. M) est trigonalisable $\Leftrightarrow \mathfrak{X}_f$ (resp. \mathfrak{X}_M) est scindé dans K .

Corollaire : Si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ (resp. $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$). Alors, f (resp. M) est trigonalisable.

Proposition : (Somme et produit des valeurs propres)

Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ de spectre $\text{Sp}(M) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ de multiplicités respectives $\{m_1, \dots, m_p\}$.

Alors : $\text{tr}(M) = m_1\lambda_1 + \dots + m_p\lambda_p$ et $\det(M) = \lambda_1^{m_1} \times \dots \times \lambda_p^{m_p}$.