

A1 2 - Déterminants d'ordre n

Dans tout ce chapitre on prendra $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . On se placera dans un K -espace vectoriel E de dimension n .

1. FORMES LINEAIRES ALTERNÉES

Définition : Une application $f : E^n \rightarrow K$ est une **forme n-linéaire alternée** sur E si elle vérifie :

$\forall i \in [1, n], \forall (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in E^{n-1}$, l'application f_i partielle :

$$x \rightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n) \text{ est linéaire.}$$

$\forall (x_i)_{i \in [1, n]} \in E^n, x_i = x_j \text{ avec } i \neq j \Rightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = 0$

Proposition 1 : antisymétrie.

Soit f est une forme n-linéaire alternée sur E . $f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = -f(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$.

Proposition 2 : Soit f une forme p-linéaire alternée sur E . On ne change pas la valeur de

$f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_p)$ si l'on ajoute à l'un des éléments x_i une combinaison linéaire des autres éléments.

2. DETERMINANT

2.1 Déterminant d'un système de vecteurs

Théorème – définition : Soit $B = (e_i)_{i \in [1, n]}$ une base de E . Il existe une seule et unique forme n-linéaire alternée f sur E telle que $f(e_1, \dots, e_n) = 1$. Cette application s'appelle déterminant dans la base B , notée \det_B . On a en particulier $\det_B(e_1, \dots, e_n) = 1$

Rq : Pour une famille $S = (x_i)$ de n vecteurs de E , définis par $x_j = (a_{1j}, \dots, a_{nj})$ dans la base B ,

on note : $\det_B(x_1, \dots, x_n) = \det_B(S) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

2.2 Propriétés.

- Soient B et B' deux bases de E . Les applications n-linéaires alternées \det_B et $\det_{B'}$ sont liées par la relation : $\det_{B'} = \det_{B'}(B) \det_B$
- On a l'équivalence suivante : S famille libre de n vecteurs de $E \Leftrightarrow \det_B(S) \neq 0$
- Le déterminant dans la base B d'une famille de n vecteurs ne change pas si on ajoute à un vecteur une combinaison des autres.

2.3 Déterminant d'un endomorphisme.

Théorème-définition : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un unique scalaire k tel que pour toute base

$B = (e_i)_{i \in [1, n]}$ de E et toute famille $(x_i)_{i \in [1, n]}$ de vecteurs, on ait :

$$\det_B(u(x_1), \dots, u(x_n)) = k \det_B(x_1, \dots, x_n)$$

Ce scalaire k est appelé déterminant de l'endomorphisme u , il est noté $\det u$.

On a par ailleurs, $\det u = \det_B(u(e_1), \dots, u(e_n))$

Propriétés :

- $\det \text{Id} = 1$
- $\forall \alpha \in K, \det (\alpha \text{Id}) = \alpha^n$
- $\forall (u, v) \in L(E) \times L(E), \det (u \circ v) = (\det u) (\det v)$
- $\forall u \in \mathcal{L}(E), u$ bijectif $\Leftrightarrow \det u \neq 0$ et on a $\det (u^{-1}) = (\det u)^{-1}$

2.4 Déterminant d'une matrice carrée.

Définition : Soit M une matrice d'ordre n. On appelle déterminant de M, le déterminant dans la base canonique de K^n de la famille formée par les vecteurs colonnes de la matrice M.

Propriétés :

- $\forall (M, N) \in M_n^2(K), \det (M N) = \det (M) \cdot \det(N) = \det (N M)$
- $\forall \alpha \in K, \forall M \in M_n(K), \det (\alpha M) = \alpha^n \det M$
- M inversible $\Leftrightarrow \det M \neq 0$
- $\det ({}^t M) = \det (M)$
- Si M et N sont deux matrices semblables, alors $\det M = \det N$

3. CALCUL DE DETERMINANTS

Il est basé sur trois idées essentielles :

- Le déterminant est invariant si on ajoute à une colonne (resp. une ligne) une combinaison linéaire des autres colonnes (resp. lignes)
- Pour $\alpha \in K$, l'échange des colonnes C_j et αC_j multiplie le dét. par α (id pour ligne).
- L'échange entre les colonnes C_i et C_j change le signe du déterminant (idem pour une ligne)

3.1 Développement suivant une ligne ou une colonne

Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$. On appelle mineur de a_{ij} le déterminant Δ_{ij} de la matrice extraite de A, obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j. On appelle cofacteur de a_{ij} , le scalaire $(-1)^{i+j} \Delta_{ij}$.

Théorème : Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$.

On a : $\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$ (développement suivant la ligne i)

$\text{Det } A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$ (développement suivant la colonne j)

Corollaire : Soit T une matrice triangulaire $T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$ alors $\det T = \prod_{i=1}^n a_{ii}$

Proposition : déterminant par blocs

Soit $M = \begin{bmatrix} A & B \\ O & C \end{bmatrix}$ avec A matrice carrée d'ordre n et C matrice carrée d'ordre p.

On a $\det M = \det A \cdot \det C$