Al 1 - Révisions d'algèbre

Dans tout le chapitre **K** désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. ESPACES VECTORIELS

1.1 Structure d'espace vectoriel

Définition : On appelle **espace vectoriel** sur **K** ou **K**-espace vectoriel tout ensemble E muni d'une loi de composition interne notée + et d'une loi de composition externe notée . tel que :

- (E, +) est un groupe commutatif
- la loi externe vérifie les 4 propriétés :

1- $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2, \forall x \in E, (\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$
2- $\forall\lambda \in \mathbf{K}, \forall(x, y) \in E^2, \lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$
3- $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbf{K}^2, \forall x \in E, \lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu)x$
4- $\forall x\in E, \quad 1.x = x$

1.2 Sous-espace vectoriel

Définition : Soient E un **K**-espace vectoriel et $F \subset E$. On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E si :

1) $F \neq \emptyset$
2) $\forall(x,y)\in F^2, \; x + y \in F$
3) $\forall\lambda\in\mathbf{K}, \forall x\in F, \; \lambda x \in F$

Proposition 1 : Soient E un **K**-espace vectoriel et $F \subset E$. F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si : 1. $F \neq \emptyset$
2. $\forall(x, y)\in F^2, \forall\lambda\in\mathbf{K}, \lambda x + y \in F$

Proposition 2 : Soit E un **K**-espace vectoriel. L'intersection de 2 sous espaces vectoriels de E est un sous espace vectoriel de E.

Proposition 3 : Soient E un **K**-ev, $n\in \mathbb{N}^*$ et $(x_1,x_2,...,x_n)\in E^n$. **L**'ensemble des combinaisons linéaires de $x_1,x_2,...,x_n$ est un sous-espace vectoriel de E noté $\mathrm{Vect}(x_1,x_2,...,x_n)$

1.3 Familles génératrices, familles libres, bases

Définition 1 : Soient E un **K**-ev , $n\in \mathbb{N}^*$ et $(x_1,x_2,...,x_n)\in E^n$. On dit que $(x_1,x_2,...,x_n)$ est une **famille génératrice** de E si :

$$\forall x\in E, \; \exists(\lambda_1, \lambda_2, ... , \lambda_n)\in\mathbf{K}^n \;/\; x = \lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 +...+\lambda_nx_n = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i$$

Remarque : *$(x_1,x_2,...,x_n)$ est une* ***famille génératrice*** *de E ssi* ***$\mathrm{Vect}(x_1,x_2,...,x_n) = E$.***

Proposition 1 : Soient E un **K**-ev, $n\in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{S}' = (x_1,x_2,\cdots,x_n,x_{n+1})\in E^{n+1}$ et $\mathcal{S} = (x_1,x_2,\cdots,x_n)$.
Si $\mathcal{S}'$ est génératrice de E et $x_{n+1}\in \mathrm{Vect}(\mathcal{S})$ alors $(\mathcal{S})$ est une famille génératrice de E

Définition 2 : Soient E un **K**-ev, $n\in \mathbb{N}^*$ et $(x_1,x_2,...,x_n)\in E^n$.
- On dit que $(x_1,x_2,...,x_n)$ est une **famille libre** de E si :
$$\forall(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)\in \mathbf{K}^n,\ \lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 +...+\lambda_nx_n = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 =... = \lambda_n = 0$$
- On dit que $(x_1,x_2,...,x_n)$ est une famille **liée** si elle n'est pas libre.

Proposition 2 :
Soient E un **K**-ev, $n\in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{S}' = (x_1,x_2,\cdots,x_n,x_{n+1})\in E^{n+1}$ et $\mathcal{S} = (x_1,x_2,\cdots,x_n)$.
Si $\mathcal{S}$ est libre et $x_{n+1} \notin \mathrm{Vect}(\mathcal{S})$ alors $\mathcal{S}'$ est libre.

Définition 3 : On appelle **base** de E toute famille libre et génératrice de E.

Théorème-définition 1 : $n\in \mathbb{N}^*$, dans le **K**-ev $\mathbf{K}^n$ la famille $(e_i)_{1\leq i \leq n}$ définie par
$\forall i\in \{1,2,...,n\}\quad e_i = (0,...,0,1,0,...,0)$ (le 1 est à la $i^{\text{ème}}$ place)
est une base de $\mathbf{K}^n$ appelée ***base canonique*** de $\mathbf{K}^n$

Rq : on note aussi $\forall i\in \{1,2,...,n\}\ e_i = (\delta_{ij})_{1\leq j \leq n}$ où $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} =0$ si $i \neq j$
(*symbole de Kronecker*)

Théorème-définition 2 :
Une famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ... , e_n)$ d'éléments d'un **K**-ev E est une base
de E si et seulement si : $\forall\ x\in E,\ \exists!(x_1,x_2,...,x_n)\in \mathbf{K}^n\ /\ x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.
$x_1,x_2,...,x_n$ sont appelées **coordonnées** (ou composantes) de x dans la base $\mathcal{B}$.

Théorème :
Tout espace vectoriel admet au moins une base.

1.4 Somme de sev - sev supplémentaires

Définition 1 : On dit que F_1 et F_2 sont en **somme directe** si $F_1 \cap F_2 =\{0_E\}$.
On note alors $F_1 \oplus F_2$ au lieu de $F_1 + F_2$.

Proposition :
Soient E un **K**-ev, F_1 et F_2 2 sev de E.
La somme $F_1 + F_2$ est **directe** si et seulement si :
$\forall x\in F_1 + F_2,\ \exists!(x_1, x_2)\in F_1 \times F_2$ tel que $x = x_1+ x_2$

Définition 2 : Soient E un **K**-ev, F_1 et F_2 2 sev de E. On dit que F_1 et F_2 sont **supplémentaires** dans E si : $E = F_1 + F_2$ et $F_1 \cap F_2 =\{0_E\}$.

1.5 Dimension

Définition : On dit qu'un **K**-ev E est de **dimension finie** si E admet une famille génératrice finie .

Rq : par convention dim({0}) = 0.

Théorème - définition 1 :
Soit E un **K**-ev de dimension finie alors :
a) E admet au moins une base finie.
b) Toutes les bases de E sont finies et ont le même cardinal, ce cardinal est appelé la dimension de E et est noté dim(E).

Rq :
- Un espace vectoriel de dimension 1 est appelé droite vectorielle
  une droite vectorielle est engendrée par n'importe quel de ses vecteurs (non nul)
- Un espace vectoriel de dimension 2 est appelé plan vectoriel.

Théorème 2 : (***théorème de la base incomplète***)
Soient E un **K**-ev non nul de dimension finie n et $\mathcal{B} = (e_1,\cdots,e_n)$ une base de E.
Soit $\mathcal{L}=(y_1, y_2, ..., y_{\mathbf{r}})$ une famille libre de E.
Il existe au moins une façon de compléter la famille libre $\mathcal{L}$ par (**n – r**) vecteurs de E pour obtenir une base de E.

Proposition 1 : Soit E un **K**-ev de dimension finie n, alors :
a) toute famille libre de E a au plus n éléments
b) toute famille génératrice a au moins n éléments

Proposition 2 : Dans un espace vectoriel de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$)
- toute famille libre de n éléments est une base
- toute famille génératrice de n éléments est une base

Proposition 3 : Soit E un **K**-ev de dimension finie.
Tout sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$

Rq : dans un ev de dimension n, on appelle *hyperplan* tout sev de dimension n -1

Proposition 4 : Soient E un **K**-ev de dimension finie n, F et G 2 sous-espaces vectoriels de E

$$((F \subset G) \text{ et } \dim(F) = \dim(G)) \Rightarrow F = G$$

Théorème 3 : Soit E un **K**-ev de dimension finie, F et G 2 sev de E.

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

2. APPLICATIONS LINEAIRES

2.1 généralités

Définition : Soient E et F deux espaces vectoriels sur **K** et f une application de E dans F.
On dit que f est une **application linéaire** de E dans F si :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ f(x + y) = f(x) + f(y) \text{ et } \forall (\lambda, x) \in \mathbf{K} \times E \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

Rq :

- On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F
- Si f est bijective on dit que f est un *isomorphisme* et que E et F sont *isomorphes*
- Si E = F on dit que f est un *endomorphisme* de E, on note $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E,E)$
- Si E = F et f bijective on dit que f est un *automorphisme* de E, on note $\mathcal{GL}(E)$ ou Aut(E) l'ensemble des automorphismes de E
- Si F = $\mathbb{R}$ on dit que f est une *forme linéaire*
- $\forall f \in \mathcal{L}(E,F)$, $f(0_E) = 0_F$.

Proposition 1 : Soient E et F deux espaces vectoriels sur **K** et f une application de E dans F. f est une application linéaire si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbf{K},\quad f(\lambda.x + y) = \lambda.f(x) + f(y)$$

Proposition 2 : Soit E un **K**-ev. L'ensemble Aut(E) des automorphismes de E est un groupe pour la loi o . Il est appelé groupe linéaire de E.

2.2. Noyau, image

Soient E et F 2 **K**-espaces vectoriels

Définition : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

On appelle **noyau de f** l'ensemble : $Ker(f) = \{x \in E,\ f(x) = 0_F\}$.

On appelle **image de f** l'ensemble : $Im(f) = f(E) = \{y \in F;\ \exists x \in E,\ y = f(x)\}$

Proposition 1 : Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

Ker(f) est un sev de E.

Im(f) est un sev de F.

Proposition 2 : soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

i) f est injective ssi $Ker(f) = \{0_E\}$

ii) f est surjective ssi Im(f) = F

2.3 Projecteurs, symétries

Définition 1 : Soient E_1 et E_2 2 sev supplémentaires d'un **K**-ev E ($E = E_1 \oplus E_2$) .

On appelle **projection sur E_1 parallèlement à E_2** l'application $p_1 : E \to E$ définie par **:**

$\forall x \in E, \exists! (x_1,x_2) \in E_1 \times E_2 \ / \ x = x_1 + x_2$ alors $p_1(x) = x_1$.

De même, on appelle projection sur E_2 parallèlement à E_1 l'application $p_2 : E \to E$ telle que $p_2(x) = x_2$.

Définition 2 : Soient E un **K**-ev et $p \in \mathcal{L}(E)$. On dit que p est un **projecteur** si : **pop = p.**

Proposition: Soit p un projecteur d'un **K**-ev E. Alors $E = Ker\ p \oplus Im\ p$

et p est la projection sur Im p parallèlement à Ker p

Définition 3 : Soient E_1 et E_2 2 sev supplémentaires d'un **K**-ev E , ($E = E_1 \oplus E_2$) .

On appelle **symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2** l'application

$s_1 : E \to E$ définie par **:** $\forall x \in E, \exists! (x_1,x_2) \in E_1 \times E_2 \ / \ x = x_1 + x_2$, alors $s_1(x) = x_1 - x_2$.

Définition 4 : on dit que $f \in \mathcal{L}(E)$ est une **involution linéaire** lorsque $f^2 = Id_E$

2.4 Applications linéaires en dimension finie

Soient E et F 2 **K**-ev de dimensions finies. On pose n = dim(E) et p = dim(F).

Définition : Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On appelle **rang de f** l'entier naturel noté **rg(f)** défini par :

$$rg(f) = \dim(Imf)$$

Théorème : *théorème du rang*

Soit E de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E,F)$ alors $rg(f) = \dim(E) - \dim(Kerf)$.

Proposition 1 : Soient E, F 2 **K**-ev de même dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Les propriétés suivantes sont alors équivalentes :

(1) f est injective — **(3)** f est bijective

(2) f est surjective — **(4)** rg(f) = n

Proposition 2 : Si E et F sont 2 **K**-ev de dimensions finies alors l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$ est de dimension finie et $\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim(E) \times \dim(F)$

3. MATRICES

3.1 Matrice d'une application linéaire

Définition : Soient E et F 2 **K**-ev, p = dim(E), n = dim(F),

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ base de E , $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_n)$ base de F et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

Pour $1 \le j \le p$, soit $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i$ ($(a_{1j}, \dots, a_{nj})$ composantes de $f(e_j)$ dans $\mathcal{B}'$).

On appelle matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ la matrice $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = (a_{ij})_{1 \le i \le n,\ 1 \le j \le p}$

Rq : Si F = E et $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ on note $Mat_{\mathcal{B}}(f) = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

Proposition:

- $(\mathcal{M}_{np}(\mathbf{K}), +, .)$ est un **K**-espace vectoriel .
- Soient E et F 2 **K**-ev, de dimensions respectives p et n. Pour toutes bases $\mathcal{B}$ de E et $\mathcal{B}'$ de F, l'application $\mathcal{L}(E,F) \to \mathcal{M}_{np}(\mathbf{K})$, $f \mapsto Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$

  est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
- $\dim(\mathcal{M}_{np}(\mathbf{K})) = np$.

3.2 Produit matriciel

Soient E, F, G 3 **K**-ev de dimensions finies non nulles respectives q, p, n et de bases $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_q)$, $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_p)$, $\mathcal{B}'' = (g_1, \dots, g_n)$, $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$
avec $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = B = (b_{kj})_{1 \le k \le p,\ 1 \le j \le q}$ et $Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g) = A = (a_{ik})_{1 \le i \le n,\ 1 \le k \le p}$.
Avec ces notations on obtient :

Proposition 1 : Mat $_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}$(gof) = $(c_{ij})_{1 \le i \le n\,,\,1 \le j \le q}$ où $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$

Définition : Soient $A = (a_{ik}) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbf{K})$ et $B = (b_{kj}) \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbf{K})$. On appelle **produit** de A par B et on note $A \times B$ la matrice $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{nq}(\mathbf{K})$ définie par :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \qquad 1 \le i \le n\,,\, 1 \le j \le q$$

Proposition 2 : Mat $_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}$(gof) = Mat $_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}$(g) $\times$ Mat $_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$(f)

3.3 Matrices inversibles, transposition, trace

Proposition 1 :
L'ensemble des éléments inversibles de $(\mathcal{M}_n(\mathbf{K})\,,\times)$ est un groupe appelé groupe linéaire et noté $GL_n(\mathbf{K})$.

Proposition 2 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
Une CNS pour que A soit inversible est l'existence de $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $AB = I_n$. On a alors $A^{-1} = B$.

Définition 1 : On appelle **transposée** de la matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbf{K})$ la matrice ${}^tA = (a'_{ij}) \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbf{K})$ telle que $a'_{ij} = a_{ji}$ pour $1 \le i \le p,\ 1 \le j \le n$

Rq : - l'application $A \mapsto {}^tA$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_{np}(\mathbf{K})$ sur $\mathcal{M}_{pn}(\mathbf{K})$
- ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$
- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est inversible alors ${}^tA$ est inversible et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$

Définition 2 : Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On appelle **trace de A** le nombre :

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Proposition 3 :
- L'application tr : $\mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \to \mathbf{K}$, $A \mapsto \mathrm{tr}(A)$ est une forme linéaire.
- $\forall A,B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \quad \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

3.4 Matrices remarquables

Définitions : Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on dit que :
- A est une matrice **scalaire** d'ordre n si $A = \alpha I_n \quad \alpha \in \mathbf{K}$
- A est une matrice **diagonale** si $\forall i,j \in \{1,\dots,n\}\ \ i \ne j \Rightarrow a_{ij} = 0$.
  On note parfois $D = \mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ une telle matrice .
- A est une matrice **symétrique** si ${}^tA = A$.
  On note $\mathcal{S}_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n.
- A est une matrice **antisymétrique** si ${}^tA = -A$

On note $\mathcal{A}_n(\mathbf{K})$) l'ensemble des matrices antisymétriques d'ordre n.

- A est une matrice **triangulaire supérieure** ssi $\forall i,j \in \{1,\dots,n\}$ $i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$
- A est une matrice **triangulaire inférieure** ssi $\forall i,j \in \{1,\dots,n\}$ $i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$

Proposition :
i) $D = \mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ est inversible ssi $\forall i \in \{1,\dots,n\}$ $\lambda_i \neq 0$ et alors $D^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda_1^{-1},\dots,\lambda_n^{-1})$.
ii) $\mathcal{S}_n(\mathbf{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbf{K})$ sont 2 sev supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
iii) Une matrice triangulaire est inversible ssi tous ses éléments diagonaux sont différents de 0.

3.5. Matrice de passage , changement de bases

Définition 1 : Soient E un **K**-ev de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$) et $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ 2 bases de E.
On appelle **matrice de passage** $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ la matrice dont les colonnes sont formées par les composantes des vecteurs de $\mathcal{B}'$ exprimées dans la base $\mathcal{B}$

Proposition 1 :
Pour toutes bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E, $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)$

Proposition 2 :
- $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est inversible et $P^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$
- Si $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}''$ 3 bases de E, alors $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}$

Proposition 3 : ***changement de base pour un vecteur***
Soient E un **K**-ev, $\mathcal{B}$,$\mathcal{B}'$ 2 bases de E , $x \in E$ et $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$, $X' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$
alors **$X = P\,X'$** (avec $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$)

Proposition 4 : ***changement de base pour un endomorphisme***
Soient E un **K**-ev, $\mathcal{B}$,$\mathcal{B}'$ 2 bases de E, $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, $f \in \mathcal{L}(E)$
$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ alors **$A' = P^{-1}AP$**

Définition 2 :
A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on dit que A et B sont **semblables** s'il existe $P \in GL_n(\mathbf{K})$ tel que :
$B = P^{-1}AP$ (on note alors $A \sim B$)

3.6. Opérations élémentaires, rang d'une matrice

Définition 1 : Soient $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbf{K})$ et $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
On appelle **opérations élémentaires** sur les lignes de A :

- la permutation (ou l'échange) de 2 lignes notée $L_i \leftrightarrow L_j$
- le produit d'une ligne par λ ($\lambda \in \mathbf{K}^*$) notée $L_i \leftarrow \lambda L_i$
- l'addition à une ligne d'une autre ligne multipliée par λ ($\lambda \in \mathbf{K}$) notée $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$

Proposition 1 :
Chaque opération élémentaire sur une matrice A correspond au produit de A par une matrice carrée inversible.

Définition 2 : Soit $A\in\mathcal{M}_{np}(\mathbf{K})$**. O**n appelle **rang** de A le rang de ses vecteurs colonnes, on le note rg(A).

Proposition 2 :
Soient E et F 2 **K**-ev de bases respectives $\mathcal{B},\mathcal{B}'$ et $f\in\mathcal{L}(E,F)$.
Si $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$, alors : $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(A)$.

Proposition 3 :
$\forall A\in\mathcal{M}_{np}(\mathbf{K})$,
- si $B\in GL_n(\mathbf{K})$ alors $\mathrm{rg}(BA) = \mathrm{rg}(A)$
- si $C\in GL_p(\mathbf{K})$ alors $\mathrm{rg}(AC) = \mathrm{rg}(A)$

Proposition 4 :
$\forall A\in\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ $\mathrm{rg}(A) = n \Leftrightarrow A\in GL_n(\mathbf{K})$

Proposition 5 :
$\forall A\in\mathcal{M}_{np}(\mathbf{K})$, $\mathrm{rg}({}^tA) = \mathrm{rg}(A)$

4. SYSTEMES LINEAIRES, DETERMINANT

4.1. Généralités sur les systèmes linéaires

- On appelle **système linéaire** de n équations linéaires à p inconnues $x_1, x_2, \cdots, x_p \in \mathbf{K}$

le système (S) : $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_p \end{cases}$$

où les coefficients a_{ij} , b_j $(1 \le i \le n, 1 \le j \le p)$ sont éléments de **K**

- En notant $A = (a_{ij})$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ on obtient : X est solution de (S) dans $\mathbf{K}^p$ si et seulement si $A X = B$ (interprétation matricielle de (S))

- Soit $f\in\mathcal{L}(E,F)$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = A$ et $x\in E$, $b\in F$ tels que X (resp. B) est la matrice colonne des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$ (resp. b dans $\mathcal{B}'$) :

$$AX = B \Leftrightarrow f(x) = b \qquad \text{(interprétation vectorielle de (S))}$$

- Si $B = 0$, on dit que le **système est homogène** (noté (S_0))

- le rang r de A est appelé **rang du système** (S)

- Résoudre le système (S), c'est chercher l'ensemble $\mathcal{S}$ des p-uplets solutions de (S).

4.2 Systèmes de Cramer

Définition :

Le système (S) est dit de Cramer si A est carrée et inversible (ou f isomorphisme).

Proposition 1 :

Un système de Cramer admet une solution unique :

$$x = f^{-1}(b) \quad \text{ou encore} \quad X = A^{-1}B$$

Proposition 2 :

Soit (S_0) un système homogène de n équations linéaires à p inconnues d'écriture matricielle $AX = 0$ avec $rg(A)=r$. L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (S_0) est un sev.de $\mathbf{K}^p$ de dimension **p - r**.

4.3Déterminant d'ordre 2 et 3

Définition 1 :

On appelle **déterminant** de 2 vecteurs $u(x_1, x_2)$ et $v(y_1, y_2)$ de K^2, le scalaire

$$\det(u,v) = x_1y_2 - x_2y_1 \quad \text{on note} \quad \det(u,v) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

Proposition 1 :

$\forall (u,v,w) \in E^3$, $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2$:

$\det_{\mathcal{B}}(v,u) = -\det_{\mathcal{B}}(u,v)$ et $\det_{\mathcal{B}}(u, \lambda u) = 0$

$\det_{\mathcal{B}}(\lambda u + \mu v, w) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(u,w) + \mu \det_{\mathcal{B}}(v,w)$

$\det_{\mathcal{B}}(u,\lambda v + \mu w) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(u,v) + \mu \det_{\mathcal{B}}(u,w)$

Définition 2 :

On appelle **déterminant** de 3 vecteurs $u(x_1, x_2, x_3)$, $v(y_1, y_2, y_3)$ et $w(z_1, z_2, z_3)$de K^3, le scalaire

$$\det(u,v,w) = x_1(y_2z_3 - y_3z_2) + x_2(y_3z_1 - y_1z_3) + x_3(y_1z_2 - y_2z_1)$$

Rq : $\det(u,v,w) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - x_2\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} + x_3\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}$

Proposition 2 :

$\forall (u,v,w) \in E^3$, $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2$:

$\det_{\mathcal{B}}(u,w,v) = \det_{\mathcal{B}}(v,u,w) = \det_{\mathcal{B}}(w,v,u) = -\det_{\mathcal{B}}(u,v,w)$

$\det_{\mathcal{B}}(v,w,u) = \det_{\mathcal{B}}(w,u,v) = \det_{\mathcal{B}}(u,v,w)$

$\det_{\mathcal{B}}(u,u,w) = \det_{\mathcal{B}}(u,v,v) = \det_{\mathcal{B}}(u,v,u) = 0$

$\det_{\mathcal{B}}(u,\lambda v + \mu v',w) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(u,v,w) + \mu \det_{\mathcal{B}}(u,v',w)$ $\quad v' \in E \quad$ etc $\cdots$

4.4. Déterminant d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

Soient E un **K**-ev de dimension n = 2 ou n = 3 et $\mathcal{B} = (e_1,e_2)$ ou $\mathcal{B} = (e_1,e_2,e_3)$ une base de E.

Théorème-définition : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Le scalaire $\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}))$ est indépendant de la base $\mathcal{B}$ de E.
Ce nombre est appelé déterminant de f et noté det(f)

Proposition 1 : $f \in \mathcal{L}(E)$ est bijectif ssi $\det(f) \neq 0$

Proposition 2 : ***composée d'endomorphismes***
$f, g \in \mathcal{L}(E)$, $\det(g \circ f) = \det(g)\det(f)$

Proposition 3 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Si f est bijective alors $\det(f^{-1}) = \dfrac{1}{\det(f)}$

Définition : Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ (n = 2 ou 3) et $f \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^n)$ associé canoniquement à A.
On appelle déterminant de A et on note **det A** le réel : $\det(A) = \det(f)$

Rq : on a aussi $\det(A) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$ où $\mathcal{C}$ est la famille de ses vecteurs colonnes.

Proposition 4 :
i) $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $\det(A) = \det({}^tA)$
ii) $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, $k \in \mathbf{N}$, $\det(A^k) = (\det(A))^k$
iii) $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, A est inversible ssi $\det(A) \neq 0$ et dans ce cas $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$
iv) $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}), \forall \alpha \in \mathbf{K}$, $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$

Remarques :
- Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ sont 2 matrices semblables alors $\det(A) = \det(B)$.
- Un déterminant est inchangé en ajoutant à une colonne une combinaison linéaire des autres.
- Un déterminant est inchangé en ajoutant à une ligne une combinaison linéaire des autres.

Formules de Cramer : Soit un système de Cramer,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

d'écriture matricielle AX = B .

L'unique solution $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est déterminée par :

$$\boxed{1 \leq j \leq n, \quad x_j = \frac{\det(Aj)}{\det(A)}}$$

où A_j est la matrice obtenue en remplaçant dans A la colonne $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ par $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.