Correction DM 7

PARTIE 1

1a) Si $X = (x_i)_{i=1}^n$ et $Y = (y_i)_{i=1}^n$ sont des éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on a

$$\boxed{{}^tXY = {}^tYX = \sum_{i=1}^n x_iy_i}$$

1b) Développement sans problème :

$$\begin{aligned}\left({}^tXY\right)^2 &= ({}^tXY)({}^tXY) = ({}^tXY)({}^tYX) \text{ calcul précédent}\\ &= ({}^tX)\left(Y{}^tY\right)(X) \text{ par associtivité}\\ &= ({}^tYX)({}^tXY) = {}^tY(X{}^tX)Y \quad \text{symétriquement}\end{aligned}$$

1c) On sait que dans une base orthonormale : $\langle X, SY\rangle = {}^tX(SY)$
puis comme S est symétrique ${}^tX(SY) = {}^tX{}^tSY = {}^t(SX)Y = \langle SX, Y\rangle$

$$\boxed{\langle X, SY\rangle = \langle SY, Y\rangle = {}^tXSY}$$

2a) On a : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXS_1X \geq 0$ et ${}^tXS_2X \geq 0$ et donc en ajoutant ${}^tX(S_1 + S_2)X \geq 0$

$$\boxed{(S_1, S_2) \in \left(\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})\right)^2 \Rightarrow S_1 + S_2 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})}$$

2b) idem car la somme d'un réel positif et d'un réel strictement positif est un réel strictement positif.
2c) On a : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tX({}^tAA)X = {}^t(AX)(AX) = \langle AX, AX\rangle = \|AX\|^2 \geq 0$. Et donc

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), {}^tAA \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})}$$

3a) Si $SX = \lambda X$ on a ${}^tXSX = \lambda{}^tXX = \lambda\|X\|^2$. Donc si ${}^tXSX = 0$ on a $\lambda = 0$ (car X est non nul donc $\|X\| \neq 0$)
S est donc une matrice diagonalisable (car symétrique réelle) ayant une unique valeur propre 0 . S est donc la matrice nulle: $S = P.(0).P^{-1} = (0)$
3b) On veut que MX soit orthogonal à X pour tout X . c'est une propriété classique du produit vectoriel . Il suffit de prendre pour M la matrice de $x- > i \wedge x$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On vérifie alors bien ${}^tXMX = 0$
4a) S étant symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée $(V_i)_{i=1}^n$: il existe $D = diag(\lambda_k)$ telle que $\forall k$, $SV_k = \lambda_kV_k$
Si toutes les valeurs propres sont positives on a alors pour toute matrice colonne $X = \sum_{k=1}^n y_kV_k$

$${}^tXSX = \langle X, SX\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n y_kV_k, \sum_{k=1}^n \lambda_ky_kV_k \right\rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_ky_k^2 \geq 0$$

Réciproquement si λ est valeur propre de S et X un vecteur propre asocié.le calcul du **3a** donne ${}^tXSX = \lambda\|X\|^2$. comme on suppose ${}^tXSX \geq 0$ et que $X \neq \overrightarrow{0}$ on a bien $\lambda \geq 0$
4b) deux matrices semblables ont même spectre . Donc si S' est symétrique réelle semblable à S symétrique positive les valeurs propres de S (donc de S') sont toutes positives donc S' est positive.
5a) Sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ la relation $\geq$ est bien :

- binaire
- réflexive : $(0)_n$ est bien positive donc $S_1 \geq S_1$
- antisymétrique : si $S_1 \geq S_2$ et si $S_2 \geq S_1$ les valeurs propres de $S_2 - S_1$ sont toutes à la fois positives et négatives. $S_2 - S_1$ est donc diagonalisable (car symétrique réel) ayant une seule valeur propre 0 donc c'est la matrice nulle. . $S_2 = S_1$
- transitive : Si $S_1 \geq S_2$ et $S_2 \geq S_3$ on a $S_1 - S_2 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $S_2 - S_3 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ donc d'après **2a** la somme $S_1 - S_3 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et donc $S_1 \geq S_3$.

5b) il suffit de prendre $S_2 = 0$ et pour S_1 une matrice symétrique ayant une valeur propre positive et une négative . Exemple

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$S_1 - S_2$ n'est ni positive ni positive d'après I4a)
5c) la relation $>$ n'est pas réflexive car $(0)_n \notin \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$
5d) On peut se douter (ou montrer) qu'une matrice de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ a des valeurs propres strictement positives.
On prend donc $S_2 = 0$ et S_1 symétrique ayant des valeurs propres positives et ayant la valeur propre 0 . Par exemple $S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ On a $S_1 \neq (0)$ ${}^tXS_1X = z^2 \geq 0$ et si $X = \begin{pmatrix} x \neq 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ${}^tXS_1X = 0$
6a) question de cours .On doit montrer $x \in E_\lambda(u) \Rightarrow v(x) \in E_\lambda(u)$. Donc $u(x) = \lambda x \Rightarrow u(v(x)) = \lambda v(x)$. Or

$$\begin{aligned} u(v(x)) &= (u \circ v)(x) \\ &= (v \circ u)(x) \text{ par hypothèse sur } u \text{ et } v \\ &= v(u(x)) = v(\lambda(x)) \\ &= \lambda v(x) \text{ par linéarité de } v \end{aligned}$$

6b) L'endomorphisme induit par v diagonalisable sur un sous espace stable est lui même diagonalisable. Donc l'endomorphisme v_i est diagonalisable et il existe une base de $E_{\lambda_i}(u)$ qui est une base de vecteurs propres de v_i. u étant diagonalisable E est somme directe des sous espaces propres .L'union des bases précédente est donc une base de E . Par construction ces vecteurs sont des vecteurs propres de v et de u (car éléments des sous espaces propres) . Dans cette base u et v sont donc simultanément diagonalisables.
7a) Si A et B commutent A et B sont diagonalisables au moyen d'une même matrice de passage . On prend la question précédente avec $A = Mat_{\mathcal{C}}(u)$ et $B = Mat_{\mathcal{C}}(v)$. P est alors la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$.
Réciproquement si A et B son diagonalisables au moyen d'une même matrice de passage . On a $A = PDP^{-1}$, $B = P\Delta P^{-1}$ (D et Δ diagonales) et comme deux matrices diagonales commutent $AB = BA = P(D\Delta)P^{-1}$
7b)
A est de rang 1 et $E_0(A)$ est le plan $(x + y - z = 0)$. Par la trace on en déduit que la troisième valeur propre est 3 puis on trouve $E_3(A) = Vect \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
Pour B le calcul du polynôme caractéristique en commençant par exemple par faire $C_2 + C_3 -> C_3$ donne deux valeurs propres 4(double) et 1(simple) . Puis le calcul des sous espaces propres donne : $E_4(B)$ est le plan $-2x + y - z = 0$ et $E_1(B) = Vect \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. On vérifie alors que $E_1(B) \subset E_0(A)$, $E_3(A) \subset E_4(B)$. Les trois droites $E_1(B), E_3(A)$, $E_0(A)$ $\cap E_4(B)$ sont trois droites de vecteurs propres communs qui engendrent l'espace . Une matrice de passage est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

remarque : je ne pense pas que le passage par l'endomorphisme induit par v sur $E_0(A)$ soit plus simple
8) S_1 et S_2 sont diagonalisables (symétriques réels) , et commutent . S_1 et S_2 sont donc diagonalisables avec une même matrice de passage ($S_1 = PDP^{-1}, S_2 = P\Delta P^{-1}$). Cette matrice de passage diagonalise aussi $S_1S_2 = S_2S_1 = PD\Delta P^{-1}$, la matrice diagonale semblable à S_1S_2 étant $D\Delta$. S_1 et S_2 étant positives ont toutes leurs valeurs propres positives. Les valeurs propres de S_1S_2 (produit des termes diagonaux) sont donc aussi toutes positives et S_1S_2 est symétrique positive.(toujours **4a**)
9a) Avec les notations précédentes ($S_1 = PDP^{-1}, S_2 = P\Delta P^{-1}$). On donc $\Delta - D$ positives . Donc pour les termes diagonaux $\delta_i - d_i \geq 0$ et $d_i \geq 0$. La fonction carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc $\forall i$, $\delta_i^2 \geq d_i^2$. $\Delta^2 - D^2$ est donc positive et $S_2^2 - S_1^2$ est une matrice symétrique semblable à une matrice symétrique positive donc est aussi positive. $S_2^2 \geq S_1^2$ (cf **4b)**
9b) On a $S_2 - S_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ de valeurs propres 0 et 5/2 réels positifs. La matrice est positive est $S_2 \geq S_1$
S_1 de valeurs propres 0 et 1 donc $S_1 \geq 0$
et $S_2^2 - S_1^2 = \begin{pmatrix} 1/4 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$ de déterminant $-9/4$. Le produit des valeurs est négatif. L'une des valeurs propres est négatives.$S_2^2 - S_1^2$ n'est pas positive.

Partie II

1)
a $\Leftrightarrow$ b : idem **I4a**

S étant symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée $(V_i)_{i=1}^n$: il existe $D = diag(\lambda_k)$ telle que $\forall k$, $SV_k = \lambda_k V_k$
Si toutes les valeurs propres sont strictement positives on a alors pour toute matrice colonne non nulle $X = \sum_{k=1}^n y_k V_k$

$$^tXSX = \langle X, SX\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n y_k V_k, \sum_{k=1}^n \lambda_k y_k V_k \right\rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k y_k^2 > 0$$

En effet on a une somme de termes positifs , un au moins étant strictement positif.
Réciproquement si λ est valeur propre de S et X vecteur propre asocié on a $^tXSX = \lambda \|X\|^2$. comme on suppose $^tXSX > 0$ et que $X \neq \overrightarrow{0}$ on a bien $\lambda > 0$
b $\Rightarrow$ **c** . S étant diagonalisable dans une base orthonormée (symétrique réelle) on peut écrire $S = PD^tP$. avec $D = diag(d_i)$. Par hypothèses les d_i sont strictement positifs . On peut donc définir $\Delta = diag(\sqrt{d_i})$ qui est inversible car les termes diagonaux sont non nuls. $M = \Delta^t P$ est alors <u>une</u> solution du problème.

$$^tMM = P\Delta\Delta^tP = PD^tP = S$$

c $\Rightarrow$ **d** si $S = {}^tMM$ avec M inversible , S est inversible (comme produit de matrices inversibles) et S est positive d'après **I2c**
d $\Rightarrow$ **b** : S est positive donc toutes les valeurs propres de S sont positives et S est inversible donc 0 n'est pas valeur propre de S . Les valeurs propres de S sont donc strictement positives.
On a la chaînes $b \Rightarrow c \Rightarrow d \Rightarrow b$ et $a \Leftrightarrow b$ donc l'équivalence des 4 propositions.
2a) A est bien une matrice symétrique.
Si $X = (x_i)_{i=1}^n$ et $Y = AX = (y_j)_{j=1}^n$ on a :

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 - x_2 \\ \forall j \in [[2, n-1]] \text{ , } y_j = -x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1} \\ y_n = -x_{n-1} + 2x_n \end{cases}$$

On a donc

$$\begin{aligned} ^tXAX &= \sum_{i=1}^n x_i y_i = 2\sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=2}^n x_{i-1}x_i - \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} \\ &= \left(\sum_{i=2}^n x_i^2 + x_1^2\right) + \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + x_n^2\right) - \sum_{i=1}^{n-1} x_j x_{j+1} - \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n-1} x_{j+1}^2 + x_1^2\right) + \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + x_n^2\right) - 2\sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} \\ &= x_1^2 + x_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(x_{i+1}^2 - 2x_i x_{i+1} + x_i^2\right) \\ &= x_1^2 + x_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2 \end{aligned}$$

2b pour toute colonne X on constate que ^tXAX est une somme de carré donc est un réel positif. De plus la somme est nulle si et seulement si chaque terme est nul donc si et seulement si $\begin{cases} x_1 = 0 \\ \forall i \in [[1..n-1]] \text{ , } x_{i+1} - x_i = 0 \\ x_n = 0 \end{cases}$
Tous les x_i sont donc nuls . Donc si $X \neq (0)$ ^tXAX est strictement positif.
2c) Avec la matrice M du sujet notons $S = ^t MM = (s_{i,j})$ on a en faisant le produit :

$$\begin{cases} s_1 = u_1^2 \\ i > 1 \Rightarrow s_i = u_i^2 + v_{i-1}^2 \\ 1 \leq i \leq n-1 \Rightarrow s_{i,i+1} = s_{i+1,i} = u_i v_i \\ |j - i| > 1 \Rightarrow s_{i,j} = 0 \end{cases}$$

On doit donc résoudre le système non linéaire

$$\begin{cases} u_1^2 = 2 \\ i > 1 \Rightarrow u_i^2 + v_{i-1}^2 = 2 \\ 1 \leq i \leq n-1 \Rightarrow u_i v_i = -1 \end{cases}$$

On a donc $v_i = -\frac{1}{u_i}$ et en reportant $u_i^2 = 2 - \frac{1}{u_{i-1}^2}$. Soit en posant $a_i = u_i^2$ la suite homographique:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_i = 2 - \frac{1}{a_{i-1}} \end{cases}$$

l'équation $l = 2 - 1/l$ donne un point fixe double $l = 1$. La suite $\frac{1}{a_i - 1}$ est donc arithmétique . Or

$$\frac{1}{a_i - 1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{a_{i-1}}} = \frac{a_{i-1}}{a_{i-1} - 1} = 1 + \frac{1}{a_{i-1} - 1}$$

d'où $\frac{1}{a_i - 1} = i$ et

$$u_i = \sqrt{\frac{i+1}{i}}, v_i = -\sqrt{\frac{i}{i+1}}$$

3a) $\mathcal{U}$ est une base car S est une matrice inversible d'après **II1c**
3b) C'est la méthode d'orthogonalisation de Schmidt .Démonstration par récurrence

- (V_1) est réduit à un seul vecteur non nul donc est une famille orthogonale de vecteurs non nuls
- (V_1, V_2) est une famille orthogonale de vecteurs non nuls et $Vect(V_1, V_2) = Vect(U_1, U_2)$. En effet
  - p_1 est la projection orthogonale sur $Vect(U_1) = Vect(V_1)$ donc $V_2 = U_2 - p_1(U_2)$ est orthogonal à V_1
  - si V_2 était nul , on aurait $U_2 = p_1(U_2) \in Vect(U_1)$. Absurde car (U_1, U_2) est libre
  - (V_1, V_2) est une famille orthogonale de vecteurs non nuls , c'est donc une famille libre.
  - Enfin $Vect(V_1, V_2) \subset Vect(U_1, U_2)$ par construction,et comme les deux familles de deux vecteurs sont libres il y a égalité.
- On suppose que $(V_i)_{i=1}^{k-1}$ est une famille orthogonale de vecteurs non nuls tels que $Vect(V_i)_{i=1}^{k-1} = Vect(U_i)_{i=1}^{k-1}$. Montrons que $(V_i)_{i=1}^{k}$ est une famille orthogonale de vecteurs non nuls tels que $Vect(V_i)_{i=1}^{k} = Vect(U_i)_{i=1}^{k}$.
  - par hypothèse de récurrence on doit seulement montrer que V_k est un vecteur non nul orthogonal à $Vect(V_i)_{i=1}^{k-1}$ puis $Vect(V_i)_{i=1}^{k} = Vect(U_i)_{i=1}^{k}$.
  - Par construction p_{k-1} est la projection orthogonale sur $Vect(V_i)_{i=1}^{k-1} = Vect(U_i)_{i=1}^{k-1}$ donc $V_k = U_k - p_{k-1}(U_k)$ est orthogonal à $Vect(V_i)_{i=1}^{k-1}$
  - Si V_k est nul alors $U_k = p_{k-1}(U_k) \in Vect(U_i)_{i=1}^{k-1}$ et la famille $(U_i)_{i=1}^{n}$ est lié . Absurde
  - Enfin par construction $V_k \in Vec(U_k) \oplus Vect(U_i)_{i=1}^{k-1} = Vect(U_i)_{i=1}^{k}$ et $Vect(V_i)_{i=1}^{k-1} = Vect(U_i)_{i=1}^{k-1} \subset Vect(U_i)_{i=1}^{k}$. Donc $Vect(V_i)_{i=1}^{k} \subset Vect(U_i)_{i=1}^{k}$. Les deux familles étant libres de même cardinal , les deux sous espaces sont égaux.

pour $k = n$ on obtient que $\mathcal{V}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$.
3c) La base est orthonormale car on norme une base orthonormée (et les dénominateurs sont non nuls car les V_i sont des vecteurs non nuls)
Par construction de $\mathcal{V}$ on a vu que $V_k \in Vect(U_i)_{i=1}^{k}$. Les coordonnées de V_k sur $U_{k+1}, \cdots U_n$ sont donc nuls .
$Mat_{\mathcal{U}}(\mathcal{V})$ est triangulaire supérieure. Diviser chaque colonne par sa norme ne change pas les coefficients nuls . $Mat_{\mathcal{U}}(\mathcal{W})$ est triangulaire supérieure.
3d) notons $\mathcal{B}$ la base canonique . On a

$$M = Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{U}) = Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{W})\, Mat_{\mathcal{W}}(\mathcal{U}) = PT$$

où T est l'inverse de la matrice triangulaire supérieure construite à la question précédente.
On a alors $S = {}^t MM = {}^t T {}^t PPT$. Mais P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{W}$ toutes deux bases orthonormées . Donc P est orthogonale et ${}^t PP = I_n$. Il reste donc $S = {}^t TT$
3e) Si on pose à priori $T = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$ le calcul donne :

$${}^t TT = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 + d^2 & bc + de \\ ac & bc + de & c^2 + e^2 + f^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

en résolvant le système ligne par ligne et en choisissant pour a, d, f les racines carrées positives on obtient

$$T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On constate que T est inversible et donc d'après **II 1** S est définie positive .

4a) Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ on a ${}^tXA_0X = by^2 + 2cxy$ donc $y = 0$ ou $by + 2cx = 0$

4b)

- si A est définie positive les valeurs propres de A sont strictement positives (cf **II 1**). Leur somme (la trace) et leur produit (le déterminant) le sont aussi. On a donc $a + b > 0$ et $ab - c^2 > 0$. On en déduit que $a + b$ et ab sont strictement positifs donc a et b le sont.

- Si $a > 0$ et $ab - c^2 > 0$ on a $b > \frac{c^2}{a} > 0$ donc $Tr(A) > 0$ et $\det(A) > 0$. La somme et le produit des valeurs propres sont strictement positifs donc les valeurs propres sont strictement positives . D'après **II 1** A est définie positive.

4c) calcul par bloc :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x & {}^tX' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & {}^tV \\ V & S' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ X' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} xa + {}^tX'V & x{}^tV + {}^tX'S' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ X' \end{pmatrix} \\
&= xax + x{}^tX'V' + x{}^tVX' + {}^tX'S'S' \\
&= ax^2 + x({}^tVX' + {}^tX'V) + {}^tX'S'X' \\
&= ax^2 + 2x{}^tVX' + {}^tX'S'X' \text{ car } {}^tVX' = {}^tX'V \text{ d'après } \mathbf{I\ 1a} \\
&= a\left(x + \frac{{}^tVX'}{a}\right)^2 - \frac{1}{a}\left({}^tVX'\right)^2 + {}^tX'S'X' \\
&= a\left(x + \frac{{}^tVX'}{a}\right)^2 - \frac{1}{a}\left({}^tX'V{}^tVX'\right) + {}^tX'S'X' \text{ d'après } \mathbf{I\ 1\ b} \\
&= a\left[\left(x + \frac{{}^tVX'}{a}\right)^2 + \frac{1}{a^2}{}^tX'\left(-V{}^tV + aS'\right)X'\right]
\end{aligned}$$

On vérifie que tous les produits matriciels ont un sens les matrices étant de tailles compatibles.
On en déduit donc :

- si $a > 0$ et $aS' - V{}^tV$ définie positive , pour toute matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on a $\left(x + \frac{{}^tVX'}{a}\right)^2 \geq 0$ et ${}^tX'\left(aS' - V{}^tV\right)X' \geq 0$ donc ${}^tXSX \geq 0$. De plus si ${}^tXSX = 0$ on a une somme nulle de réelles positives donc chaque terme est nulle . En particulier ${}^tX'\left(aS' - V{}^tV\right)X' = 0$ et donc $X' = 0$ car $aS\prime - V{}^tV$ est définie positive on trouve alors $x = 0$ en reportant dans $\left(x + \frac{{}^tVX'}{a}\right)^2 = 0$. Donc $X \neq 0 \Rightarrow {}^tXSX > 0$ et S est définie positive.

- Si S est définie positive alors $a > 0$ car pour $X = \begin{pmatrix} 1 \\ (0) \end{pmatrix}$, ${}^tXSX = a$ d'après le calcul précédent (avant la division par a) et $aS' - V{}^tV$ est définie positive car pour toute matrice non nul $X' \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$

$${}^tX'\left(aS' - V{}^tV\right)X' = a^2\,{}^tXSX > 0 \text{ en prenant } X = \begin{pmatrix} 0 \\ X' \end{pmatrix}$$

4d)

- Si S est définie positive la question précédente donne par une récurrence évidente que toutes les S_i sont définies positives et tous les a_i positifs pour $i < n$. Enfin $a_n > 0$ comme valeur propre de la matrice S_n définie positive.

- Réciproquement si les (a_i) sont tous strictement positifs $S_n = (a_n)$ est définie positive . S_n est définie positives et $a_{n-1} > 0$ donc S_{n-1} est définie positive et par récurrence si S_{i-1} est définie positive S_i est définie positive car $a_{i-1} > 0$.

4e) Si $S = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}$ on a $a_1 = a, V_1 = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}, S_1' = \begin{pmatrix} b & f \\ f & c \end{pmatrix}$ d'où

$$\mathrm{S}_2 = \begin{pmatrix} ab - d^2 & af - de \\ af - de & ac - e^2 \end{pmatrix}$$

S est donc définie positive si et seulement si $a > 0$ et S_2 définie positive . Donc en utilisant **II 4b** si et seulement si $a > 0, ab - d^2 > 0$ et $\det(S_2) > 0$ or $\det(S_2) = (ab - d^2)(ac - e^2) - (af - de)^2 = a\det(S)$

S est définie positive si seulement si $a > 0$, $\begin{vmatrix} a & d \\ d & b \end{vmatrix} > 0$, $\begin{vmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{vmatrix} > 0$