Correction DM 6

1) On peut calculer la primitive par intégration par partie en posant $u(t) = \arctan(2t)$ et $v(t) = t$ qui sont deux fonctions C^1 sur le segment $[0,x]$

$$\int_0^x \arctan(2t)dt = [t\arctan(2t)]_0^x - \int_0^x \frac{2t}{1+4t^2}dt$$

la nouvelle intégrale est du type $\frac{1}{4}\int \frac{dv}{1+v^2}$ avec $v = 4t^2$

$$\int_0^x \arctan(2t)dt = \left[t\arctan(2t) - \frac{1}{4}\ln(1+4t^2)\right]_0^x$$

$$\boxed{\int_0^x \arctan(2t)dt = x\arctan(2x) - \frac{1}{4}\ln(1+4x^2)}$$

2) On utilise l'inégalité des accroissements finis pour la fonction C^1 sin

$$|\cos(x)| \leq 1 \Rightarrow |\sin(x) - \sin(0)| \leq 1\,|x-0|$$

soit

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ |\sin(x)| \leq |x|}$$

3) On pose $\phi(x,t) = \frac{\sin(xt)^2}{t^2e^{-t}}$
On montre successivement que

- f est définie sur $\mathbb{R}$
- ϕ est C^2 sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{+*}$
- $\phi, \frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$ sont dominées sur $[a,b]\times\mathbb{R}^{+*}$ par des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}^{+*}$

  pour pouvoir appliquer le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre.

a) f est définie :
pour tout x réel $\phi_x(t) = \frac{\sin(xt)^2}{t^2e^{-t}}$ est continue positive sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\frac{\sin(xt)^2}{t^2e^{-t}} \leq \frac{(xt)^2}{t^2}e^{-t} = x^2e^{-t}$.
$t->e^{-t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, donc aussi sur $]0,+\infty[$ plus petit . Donc $t->x^2e^{-t}$ est intégrable par structure d'espace vectoriel . donc ϕ_x est intégrable sur $]0,+\infty[$ par théorème de majoration des fonctions positives.
b) ϕ et le quotient de deux fonctions C^2 sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{+*}$ à dénominateur non nul donc ϕ est C^2 sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{+*}$, ce qui assure la continuité des trois foncions $\phi, \frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{+*}$.
c) Si on pose $A = \max(|a|,|b|)$, la majoration précédente donne $|\phi(x,t| \leq A^2e^{-t}$, fonction continue intégrable sur $]0,+\infty[$
De plus cette fonction ne dépend plus de x .
d) On a

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,t) = \frac{2\sin(xt)\cos(xt)}{t}e^{-t} = \frac{\sin(2xt)}{t}e^{-t}$$

d'où la domination sur $[a,b]\times\mathbb{R}^{+*}$

$$\left|\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,t)\right| \leq |2x|\,e^{-t} \leq 2Ae^{-t}$$

la fonction $t->2Ae^{-t}$ est bien intégrable sur $]0,+\infty[$, comme précédemment.
e) On a

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}(x,t) = 2\cos(2xt)e^{-t}$$

d'où la domination sur $[a,b]\times\mathbb{R}^{+*}$

$$\left|\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}(x,t)\right| \leq 2e^{-t}$$

la fonction $t->2e^{-t}$ est bien intégrable sur $]0,+\infty[$, comme précédemment.
Conclusion :

$$\boxed{f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f"(x) = \int_0^{+\infty} 2\cos(2xt)e^{-t}dt}$$

4) Pour le calcul de $f"$ on introduit $\psi_x(t) = 2e^{2ixt}e^{-t}$ et $f"(x) = \mathcal{R}e\left(\int_0^{+\infty}\psi_x(t)dt\right)$
On peut remarquer que ψ_x est continue sur $[0,+\infty[$ et que $|\psi_x(t)| = 2e^{-t}$ ce qui assure l'intégrabilité sur $[0,+\infty[$.

$$\int_0^Y 2e^{2ixt}e^{-t}dt = \int_0^Y 2e^{(2ix-1)t}dt = \left[2\frac{e^{(2i-1)t}}{2ix-1}\right]_0^Y = \frac{2}{2ix-1}\left(e^{2iY}e^{-Y}-1\right)$$

or $\left|e^{2iY}e^{-Y}\right| = e^{-Y} ->_{Y->+\infty} 0$ donc

$$\int_0^{+\infty} \psi_x(t)dt = \frac{2}{1-2ix} = \frac{2(1+2ix)}{1+4x^2}$$

d'où finalement

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \ , \ f\text{"}(x) = \frac{2}{1+4x^2}}$$

5) Reste à intégrer deux fois entre 0 et x (sans oublier les constantes d'intégration même si elles seront toutes nulles)

$$f'(x) - f'(0) = 2\int_0^x \frac{dt}{1+4t^2} = \arctan(2x)$$

or $f'(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial\phi}{\partial x}(0,t)dt = \int_0^{\infty} 0dt = 0$ donc

$$f'(x) = \arctan(2x)$$

et donc

$$f(x) - f(0) = \int_0^x \arctan(2t)dt = x\arctan(2x) - \frac{1}{4}\ln(1+4x^2)$$

or $f(0) = \int_0^{+\infty} 0dt = 0$ donc :

$$\boxed{f(x) = x\arctan(2x) - \frac{1}{4}\ln(1+4x^2)}$$