Correction DM 5

1. Partie

Question I1

I1a) Sur l'intervalle $]-R,R[$, on écrit:

$$f_\lambda(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$$

La somme d'une série entière est C^∞ sur le disque ouvert de convergence et, sur ce domaine, on peut dériver termes à termes.On a donc à l'intérieur du disque ouvert de convergence : :

$$f'_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n\ ,\ xf'_\lambda(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^n, \quad xf''_\lambda(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1}x^n,$$

On a donc en ajoutant les termes et en isolant $n=0$:

$$(a_1-\lambda) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(n(n+1)a_{n+1} + (n+1)a_{n+1} - na_n - \lambda a_n\right)x^n = 0$$

La somme d'une série entière est nulle si et seulement si les coefficients sont nuls ce qui fournit les relations :

$$a_1 = \lambda \text{ et } \forall n \geqslant 1, n(n+1)a_{n+1} + (n+1)a_{n+1} - na_n = \lambda a_n$$

et finalement la récurrence espérée :

$$a_0 = 1\text{et } \forall n \geqslant 1, a_n = \frac{\lambda+n-1}{n^2}a_{n-1}$$

. On résout facilement : $\boxed{a_0 = 1, \forall n \geq 1 : a_n = \frac{1}{n!^2}\prod_{k=1}^{n}(\lambda-1+k)}$.

En particulier, si $\lambda = 1$, $a_n = 1/n!$ et $\boxed{f_1 = \exp}$
si $\lambda = 0$, $a_n = 0$ si $n \geq 0$ et $\boxed{f_0 = 1}$
si $\lambda = -1$, $a_n = 0$ si $n \geqslant 2$ et $\boxed{f_{-1} : x \mapsto 1-x}$
si $\lambda = -2$, $a_n = 0$ si $n \geqslant 3$ et f_{-2} $\boxed{x \mapsto 1-2x+\frac{1}{2}x^2}$.

il est interdit dans un problème de ce type de passer aux questions suivantes sans avoir trouver des résultats justes (la vérification est à chaque fois facile)

I1b) f_λ est un polynôme si et seulement si a_n est nul à partir d'un certain rang . D'après la récurrence il est évident que si $a_N = 0$ alors pour $n \geq N$ $a_n = 0$.
f_λ est donc un polynôme si et seulement si $\lambda + n - 1$ est nul pour un entier n .Donc si et seulement si $\boxed{\lambda \in -\mathbb{N}}$
Si $\lambda = -p \in -\mathbb{N}$, f_{-p} est de degré p et de coefficient dominant égal à $\frac{1}{p!^2}\prod_{k=1}^{p}(-p-1+k) = (-1)^p/p!$.

$$\boxed{f_{-p}(x) = (-1)^p\frac{x^p}{p!} + \sum_{k=0}^{p-1} a_k x^k}$$

I1c) Si $\lambda \notin -\mathbb{N}$, les coefficients a_n sont tous non nuls et on peut appliquer la règle de D'Alembert :

$$\lim\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right| = \lim\frac{\lambda+n}{(n+1)^2}|x| = 0$$

Le rayon de convergence de la série entière est $\boxed{R=+\infty}$.
Le calcul précédent montre donc que s'il existe une solution c'est la série précdente. La réciproque étant une simple vérification en refaisant une dérivation termes à termes le sujet a admis le résultat .

Question I2

I2a) On a vu que la fonction exponentielle est solution sur $\mathbb{R}$ de E_1. Cherchons les solutions sur la demi droite $]0,+\infty[$ en utilisant la méthode de variation de la constante. Elle sont de la forme $y(x)=z(x)e^x$ où z est de classe $\mathcal{C}^2$ car $z(x)=y(x)e^{-x}$ est le produit de deux fonctions C^2.On a :
$y(x)=z(x)e^x$
$y'(x)=z(x)e^x+z'(x)e^x$
$y"(x)=z(x)e^x+2z'(x)e^x+z"(x)e^x$
Si on reporte dans l'équation on a après simplification par e^x :

$$(E_1)\Leftrightarrow x(z''+2z'+z)+(1-x)(z'+z)-z=0\Leftrightarrow xz''+(x+1)z'=0$$

On sait par le cours que le coefficient de $z(x)$ doit être nul . Sinon il faut reprendre le calcul. Comme on a fait toutes les vérifications au I1 on doit vite trouver l'erreur.
On peut intégrer sur $\mathbb{R}^{+*}$ puisque le coefficient de $z"$ est non nul :
$z'(x)=\exp\left(\int -\frac{x+1}{x}\right)=\alpha e^{-x}/x$où α est une constante arbitraire.
On en déduit, en prenant la primitive nulle en 1 (*le sujet impose cette primitive*) la solution générale souhaitée :

$$\boxed{f:\forall x>0, f^+_{\alpha,\beta}(x)=\alpha e^x\int_1^x \frac{e^{-t}}{t}dt+\beta e^x}$$

où α et β sont des réels arbitraires.
I2b) De même si $x<0$

$$f:\forall x>0, f^-_{\gamma,\delta}(x)=\alpha e^x\int_{-1}^x \frac{e^{-t}}{t}dt+\delta e^x$$

où γ et δ sont des réels arbitraires.
Le calcul est le même . Vous devez rédiger plus vite . Les justifications théoriques peuvent négligées.
I2c) Pour trouver une solution sur $\mathbb{R}$ il faut raccorder ces solutions en $x=0$.
Or $\lim_{x\to 0^+}\int_1^x \frac{e^{-t}}{t}dt=-\infty$: $\frac{e^{-t}}{t}\geqslant\frac{e^{-1}}{t}$ et donc $\frac{e^{-t}}{t}$ est continue positive , non intégrable sur $]0,1]$. Un raccord par continuité impose $\alpha=0$.
De façon analogue, $\lim_{x\to 0^-}\int_1^x \frac{e^{-t}}{t}dt=-\infty$ et un raccord impose $\gamma=0$.
Finalement les seules solutions définies sur tout $\mathbb{R}$ de (E_1) sont les $\boxed{x\mapsto\alpha e^x \text{ avec } \alpha\in\mathbb{R}}$ et ces fonctions sont C^2 sur $\mathbb{R}$ de façon évidente.

Question I3

I3a)*D'après la question suivante il est évident que $E_{1-\lambda}$ doit intervenir dans la réponse.*
g_λ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Comme, pour tout x réel, $f_\lambda(x)=e^x g_\lambda(-x)$, on a $f'_\lambda(x)=e^x(g_\lambda(-x)-g'_\lambda(-x))$ et $f''_\lambda(x)=e^x(g''_\lambda(-x)-2g'_\lambda(-x)+g_\lambda(-x))$, et remplaçant dans (E_λ) et simplifiant par l'exponentielle jamais nulle, on obtient l'équation différentielle vérifiée par g_λ :

$$xg_\lambda"(-x)-(1+x)g'_\lambda(-x)+(1-\lambda)g_\lambda(-x)=0$$

en remplaçant x par $-x$: $xy''+(1-x)y'+(\lambda-1)y$, où l'on reconnaît $E_{1-\lambda}$.

$$\boxed{g_\lambda \text{ est solution de } E_{1-\lambda}}$$

On peut vérifier pour $\lambda=1$.

I3b)

D'après ce qui précède et l'unicité admise par l'énoncé à la fin de la question I.1.c, il suffit de vérifier qu'en 0, la valeur prise par $e^x f_\lambda(-x)$ vaut bien 1, ce qui est évident.

$$\boxed{f_{1-\lambda}=e^x f_\lambda(x)}$$

I3c) Pour $p\in\mathbb{N}^*$, on a pour tout x : $f_p(x)=e^x f_{1-p}(-x)$ et on a vu que f_{1-p} était un polynôme de degré $p-1$.
En particulier $\boxed{f_2(x)=(1+x)e^x}$ et $\boxed{f_3(x)=(1+2x+\frac{1}{2}x^2)e^x}$.
I3d) Au voisinage de $+\infty$, d'après le I.1.b, on dispose de

$$\frac{f_{p+1}(x)}{xf_p(x)}=\frac{f_{-p}(-x)}{xf_{1-p}(-x)}$$

Or un polynôme est équivalent en $+\infty$ à son terme de plus haut degré donc :

$$\frac{f_{p+1}(x)}{xf_p(x)}\sim\frac{x^p/p!}{x.x^{p-1}/(p-1)!}=\frac{1}{p}$$

Question I4 (pour information . Vous pouvez faire le calcul avec vos connaissances de Sup)
Le calcul fournit $\frac{\partial F}{\partial u}(x,y,z)=\frac{u}{r}\frac{2rf_\lambda'(r)-f_\lambda(r)}{2r^{3/2}}$ pour $u=x$, y ou z.
De même $\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}(x,y,z)=(\frac{1}{r}-\frac{u^2}{r^3})\frac{2rf_\lambda'(r)-f_\lambda(r)}{2r^{3/2}}+\frac{u^2}{r^2}\frac{4r^2f_\lambda''(r)-4rf_\lambda'(r)+3f_\lambda(r)}{4r^{5/2}}$, et, en sommant, on obtient le laplacien de F, qui s'écrit: $\frac{2}{r}\frac{2rf_\lambda'(r)-f_\lambda(r)}{2r^{3/2}}+\frac{4r^2f_\lambda''(r)-4rf_\lambda'(r)+3f_\lambda(r)}{4r^{5/2}}=\frac{1}{4r^{5/2}}(4r^2f_\lambda''(r)+4rf_\lambda'(r)-f_\lambda(r))$.
Tenant compte de l'équation (E_λ) vérifiée par f_λ, le laplacien se réécrit: $\frac{4r^2f_\lambda'(r)+(4\lambda r-1)f_\lambda(r)}{4r^{5/2}}$, et l'équation (P) devient tout simplement $(2\lambda+1)\frac{rf_\lambda(r)}{2r^{5/2}}=0$ et est donc vérifiée dès que $\lambda=-1/2$.

2. Partie

Question II1
On a une intégrale de Wallis très classique.(voir les exos)
Après une intégration par parties : $I_{p+1}=\frac{2p+1}{2(p+1)}I_p$. Or $I_0=\pi/2$ donc:

$$\boxed{I_p=\frac{\pi}{2}\frac{(2p)!}{2^{2p}p!^2}}$$

Question II2
II2a) L'application

$$\Phi:\Phi(\theta,x)=e^{x(\sin(\theta))^2}$$

est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,\pi/2]\times\mathbb{R}$. Comme on intègre sur un segment il est inutile de dominer. $\boxed{\phi\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})}$
II2b) Soit x un réel fixé. Comme $e^z=\sum_0^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$ pour tout z réel on a pour tout x réel et tout $\theta\in[0,\pi/2]$ $e^{x\sin^2\theta}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n\sin^{2n}\theta}{n!}$.On doit intégrer par rapport à θ sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$:
Soit $\psi_n(\theta)=\frac{x^n\sin^{2n}\theta}{n!}$ .Les fonctions ψ_n sont continues donc intégrable sur le segment . La série $\sum\psi_n$ converge vers une fonction continue par morceaux..
De plus $\int_0^{\pi/2}|\psi_n|=\int_0^{\pi/2}\frac{|x|^n\sin^{2n}\theta}{n!}d\theta\leq\frac{\pi}{2}\frac{|x|}{n!}$ est le terme général d'une série convergente.($\sum\frac{|x|}{n!}=e^{|x|}$)
On peut donc intégrer terme à terme, c'est-à-dire écrire :

$$\forall x\in\mathbb{R},\phi(x)=\int_0^{\pi/2}e^{x\sin^2\theta}\,d\theta=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{x^p}{p!}\int_0^{\pi/2}\sin^{2p}\theta\,d\theta=\frac{\pi}{2}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(2p)!}{4^pp!^3}x^p.$$

remarque : Comme on intègre sur un segment on peut aussi prouver la convergence uniforme de la série $\sum\psi_n$ sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Mais comme on intègre par rapport à θ on n'intègre pas une série entière.
ϕ est donc développable en série entière sur $\mathbb{R}$ avec un rayon de convergence infini. Ses coefficients sont les $I_p/p!$, qui vérifient la récurrence : $I_0=\pi/2$ et $\frac{I_n}{n!}=\frac{2n-1}{2n^2}\frac{I_{n-1}}{(n-1)!}$.
Or $f_{1/2}$ est la fonction développable en série entière sur $\mathbb{R}$ dont les coefficients vérifient $a_0=1$ et $\forall n\geqslant 1, a_n=\frac{n-1/2}{n^2}a_{n-1}$: ce sont donc les mêmes coefficients, à $\pi/2$ près.

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\phi(x)=\frac{\pi}{2}f_{1/2}(x)}$$

Question II3
II3a) La fonction $\alpha(u)=(1-u)e^u$ est C^1 sur $]-\infty,1[$, de dérivée $\alpha'(u)=ue^u$. Elle est donc maximum en $x=0$ et son maximum vaut 1. On en déduit l'inégalité

$$\boxed{\forall u<1,\exp(u)\leq\frac{1}{1-u}}$$

II3b) Notons que comme $x<1,\left|x\sin^2(\theta)\right|<1$ et la fonction sous le signe $\int$ est continue : l'intégrale est définie.
Le changement de variable $t=\tan\theta$ est C^1 sur $[0,\pi/2[$ mais pas sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ d'où la rédaction :

$$\begin{aligned}J(x)&=\lim_{T\to\pi/2}\left(\int_0^T\frac{d\theta}{1-x\sin^2\theta}\right)=\lim_{T\to\pi/2}\left(\int_0^{\tan(T)}\frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1-x\frac{t^2}{1-t^2}}\right)=\lim_{T\to\pi/2}\left(\int_0^{\tan(T)}\frac{dt}{1+(1-x)t^2}\right)\\&=\lim_{T\to\pi/2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\arctan\left(\tan(T)\sqrt{1-x}\right)\right)=\frac{\pi}{2\sqrt{1-x}}.\end{aligned}$$

remarque:Pour un simple calcul explicite par passage à la limite ne perdez pas de temps à prouver l'intégrabilité mais n'écrivez pas $\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+(1-x)t^2}$
II3c) La positivité de $\phi(x)$ est évidente. La majoration est conséquence immédiate du a:

$$\boxed{\phi(x)\leq J(x)=\frac{\pi}{2\sqrt{1-x}}}$$

remarque : contrôle partiel de **II3b**.

II3d) Pour $\theta \in [0,\pi/2]$, on dispose de $\sin^2\theta \leqslant \theta^2$, et donc, pour $x \leqslant -1$, de $x\sin^2\theta \geqslant x\theta^2$ ($x<0$ *donc attention aux changement de sens dans vos inégalités)*
Alors, toujours pour $x \leqslant -1$, on a :

$$\phi(x) \geqslant \int_0^{\pi/2} e^{x\theta^2}\, d\theta = \int_0^{\pi/2} e^{-(\sqrt{-x}\theta)^2} \frac{d(\sqrt{-x}\theta)}{\sqrt{-x}} = \frac{1}{\sqrt{-x}} \int_0^{\pi\sqrt{-x}/2} e^{-v^2}\, dv \geqslant \frac{1}{\sqrt{-x}} \int_0^{\pi/2} e^{-v^2}\, dv.$$

On dispose donc de la minoration souhaitée, où $\boxed{A = \int_0^{\pi/2} e^{-v^2}\, dv}$.
Ce n'est peut-être pas la seule méthode.
II3e) Grâce à l'encadrement démontré au **c.**, il est clair que ϕ est de limite nulle en $-\infty$. Mais comme $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{-x}}$ n'est pas intégrable sur $]-\infty,-1]$, la minoration du **d.** prouve que ϕ n'est pas non plus intégrable sur $]-\infty,-1]$.

Question II4

II4a)D'après le I.3.b, $\forall x \in \mathbb{R}, f_{1/2}(x) = e^x f_{1/2}(-x)$ donc $h(x) = e^{-x/2} f_{1/2}(x) = e^{x/2} f_{1/2}(-x) = h(-x)$, et

$$\boxed{h \text{ est paire}}$$

Ainsi, pour tout réel x,

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{2}(h(x)+h(-x)) = \frac{1}{\pi}(e^{-x/2}\phi(x) + e^{x/2}\phi(-x)) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} e^{x/2(2\sin^2\theta-1)} + e^{-x/2(2\sin^2\theta-1)}\right) d\theta \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \mathrm{ch}(\frac{x}{2}\cos 2\theta)\, d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{ch}(\frac{x}{2}\cos u)\, du = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \mathrm{ch}(\frac{x}{2}\cos u)\, du \end{aligned}$$

grâce à la parité du cosinus hyperbolique.

$$\boxed{h(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \mathrm{ch}(\frac{x}{2}\cos u)\, du}$$

On peut aussi partir du résultat . Dans tous les cas il faut comprendre qu'aucune formule de trigo ne transforme $\sin(\theta)^2$ *en* $\cos(\theta)$ *et donc qu'il y aura aussi un changement de variable ... mais c'est la fin d'un sujet des Mines.*
II4b)$\mathrm{ch}\, t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} = 1 + t^2 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \geqslant 1 + \frac{t^2}{2}$ Donc :

$$\forall x > 0, h(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \mathrm{ch}(\frac{x}{2}\cos u)\, du \geqslant 1 + \frac{1}{4\pi}x^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 u\, du = 1 + \frac{x^2}{16}.$$

On en déduit que $\boxed{\lim_{+\infty} h(x) = \lim_{+\infty} \frac{h(x)}{x} = +\infty}$.
II4c) La fonction h est clairement croissante sur $[0,+\infty[$ car

$$0 \leqslant x \leqslant y \Rightarrow \forall u \in [0,\pi/2], 0 \leqslant \frac{x}{2}\cos u \leqslant \frac{y}{2}\cos u \Rightarrow 1 \leqslant \mathrm{ch}(\frac{x}{2}\cos u) \leqslant \mathrm{ch}(\frac{y}{2}\cos u) \Rightarrow h(x) \leqslant h(y).$$

On peut aussi dire aussi (théorème de dérivation d'un intégrale à paramètre sur un segment que h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$h'(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos u\ \mathrm{sh}(\frac{x}{2}\cos u)\, du \text{ et } h''(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi/2} \cos^2 u\ \mathrm{ch}(\frac{x}{2}\cos u)\, du \geqslant 0,$$

ce qui conclut à la croissance sur $[0,+\infty[$ et la convexité sur $\mathbb{R}$ de la fonction h.
On a aussi :
$h(0) = 1$ $h'(0) = 0$
il y a une branche parabolique verticale si x tend vers $+\infty$(**II4b)**
la fonction est paire
L'aspect général (très simple) de la courbe s'en déduit aussitôt.