DM 5

L'objet de ce problème est l'étude de l'équation différentielle suivante :

$$E_\lambda : \qquad x\,y'' + (1-x)\,y' - \lambda\,y = 0.$$

où la fonction y est une fonction inconnue deux fois continûment dérivable de la variable x et λ un réel donné.

PREMIÈRE PARTIE

I-1. Solution de l'équation différentielle définie sur toute la droite réelle :

Il est admis qu'il existe une fonction f_λ, somme d'une série entière de rayon de convergence R, strictement positif, prenant la valeur 1 en 0, ($f_\lambda(0) = 1$), solution dans l'intervalle $]-R, R[$ de l'équation différentielle E_λ. Cette fonction est définie par la relation :

$$f_\lambda(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n.$$

a. Déterminer les coefficients a_n, $n \geq 1$, en fonction de l'entier n et du réel λ. Préciser les fonctions f_1, f_0, f_{-1}, f_{-2}.

b. Pour quelles valeurs du réel λ la fonction f_λ est-elle un polynôme ? Préciser son degré en fonction de la valeur $-p$ donnée au réel λ et le coefficient du terme de plus haut degré (le terme dominant).

c. Quel est le rayon de convergence R de la série entière de terme général $a_n\, x^n$, $n \geq 1$, lorsque le réel λ est différent des valeurs obtenues précédemment ?

Il est admis, dans la suite, que la fonction f_λ est la seule fonction, développable en série entière sur toute la droite réelle, qui soit solution de l'équation différentielle E_λ et qui prenne la valeur 1 en 0.

I-2. Solution de l'équation différentielle E_1 :
Dans cette question le réel λ est égal à 1 :

$$E_1 : \qquad x\,y'' + (1-x)\,y' - y = 0.$$

a. Déterminer la solution générale f_1 de l'équation différentielle E_1 sur la demi-droite $]0,\infty[$, exprimer cette solution à l'aide de fonctions usuelles et de la fonction définie sur la demi-droite $]0,\infty[$, par la relation

$$x \mapsto \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

b. Déterminer de même la solution générale de l'équation différentielle E_1 sur la demi-droite $]-\infty, 0[$.

c. Déterminer enfin les fonctions solutions sur $\mathbf{R}$ de l'équation différentielle E_1.

I-3. Relation entre les fonctions f_λ :
Étant donné un réel λ, soit g_λ la fonction définie sur la droite réelle $\mathbf{R}$ par la relation suivante :

$$g_\lambda(x) = e^x\ f_\lambda(-x).$$

a. Déterminer une équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par la fonction g_λ.

b. En déduire, en admettant que le produit de deux fonctions réelles développables en série entière sur la droite réelle $\mathbf{R}$ est encore une fonction développable en série entière sur la droite réelle $\mathbf{R}$, que, pour tous réels λ et x, il vient :

$$f_{1-\lambda}(x) = e^x f_\lambda(-x).$$

c. Préciser, lorsque p est un entier strictement positif, les fonctions f_p. En déduire les fonctions f_2 et f_3.

d. Soit p un entier donné supérieur ou égal à 1 ($p \geq 1$) ; quelle est, lorsque le réel x croît indéfiniment, la limite de l'expression ci-dessous :

$$\frac{f_{p+1}(x)}{x\,f_p(x)}\ ?$$

I-4. Application à une équation aux dérivées partielles :

Soit Ω le sous-ensemble ouvert de $\mathbf{R}^3$, rapporté à un repère Oxyz, obtenu en retranchant de $\mathbf{R}^3$ le plan Oxy :

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \ \mid \ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \ ; \ z \neq 0\right\}.$$

Soit F une fonction inconnue, définie dans l'ouvert Ω, vérifiant l'équation aux dérivées partielles (P) suivante :

$$(P) \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{r}{z}\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{1}{4r^2}F = 0.$$

Il a été posé dans cette relation :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,.$$

Comment y a-t-il lieu de choisir le réel λ pour que la fonction F définie dans l'ouvert Ω par la relation suivante

$$F(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{r}} f_\lambda(r),$$

soit solution de l'équation aux dérivées partielles (P) ?

SECONDE PARTIE

L'objet de cette seconde partie est l'étude de certaines propriétés de la fonction $f_{1/2}$. Dans ce but soit φ la fonction, définie pour tout réel x, par la relation suivante :

$$\varphi(x) = \int_0^{\pi/2} e^{x \sin^2\theta} d\theta.$$

Étant donné un entier naturel p, soit I_p l'intégrale définie par la relation suivante :

$$I_p = \int_0^{\pi/2} \sin^{2p}\theta \, d\theta.$$

II-1. Détermination de l'intégrale I_p :

Établir une relation entre les intégrales I_p et I_{p+1}. En déduire la valeur de l'intégrale I_p.

II-2. Relation entre les fonctions φ et $f_{1/2}$:

a. Démontrer que la fonction φ est définie et continue sur toute la droite réelle $\mathbf{R}$. Est-elle plusieurs fois continûment dérivable ?

b. Déterminer le développement en série entière de la fonction φ sur un intervalle $\left]-R, R\right[$. En déduire qu'elle est proportionnelle à la fonction $f_{1/2}$. Préciser le coefficient de proportionnalité.

II-3. Encadrements de $\varphi(x)$:

a. Démontrer que, pour tout réel u strictement inférieur à 1 ($u < 1$), l'inégalité ci-dessous existe :

$$e^u \le \frac{1}{1-u}.$$

b. Soit x un réel strictement inférieur à 1 ($x < 1$) ; soit $J(x)$ l'intégrale définie par la relation suivante :

$$J(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1 - x\sin^2\theta}.$$

Calculer l'intégrale $J(x)$.

c. Déduire des résultats précédents que, pour tout réel x strictement inférieur à 1 ($x < 1$), la fonction φ vérifie l'encadrement suivant :

$$0 \le \varphi(x) \le \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

d. Démontrer l'existence d'une constante A strictement positive telle que pour tout réel x inférieur ou égal à -1 ($x \le -1$), la fonction φ vérifie la minoration suivante :

$$\varphi(x) \ge \frac{A}{\sqrt{-x}}.$$

e. Démontrer que la fonction $f_{1/2}$ admet une limite lorsque le réel x tend vers $-\infty$. Préciser cette limite. Est-ce que la fonction $f_{1/2}$ est intégrable sur la demi-droite $]-\infty, -1]$?

II-4. Étude d'une fonction h :

Soit h la fonction définie sur la droite réelle par la relation :

$$h(x) = e^{-x/2} f_{1/2}(x).$$

a. Démontrer que la fonction h est paire et que la valeur de $h(x)$ est donnée par la relation suivante :

$$h(x) = k\int_0^{\pi/2} ch\left(x\frac{\cos\theta}{2}\right) d\theta.$$

où k est une constante qui sera déterminée.

b. Déterminer, lorsque le réel x croît indéfiniment, les limites des deux expressions suivantes :

$$h(x) \text{ et } \frac{h(x)}{x}.$$

c. Étudier les variations de la fonction h et tracer la courbe représentative, lorsque le réel x varie sur la droite réelle $\mathbf{R}$.

FIN DU PROBLÈME