DM 4 Correction

Partie 1

1) $\|x+y\|^2 = (\ x+y \mid x+y\ ) = (\ x \mid x\ ) + (\ x \mid y\ ) + (\ y \mid x\ ) + (\ y \mid y\ )$ $= \|x\|^2 + 2(\ x \mid y\ ) + \|y\|^2$.

2) a) $\|\lambda x+y\|^2 = \lambda^2\|x^2\| + 2\lambda(\ x \mid y\ ) + \|y\|^2 \geqslant 0$ pour tout λ. Donc le discriminant est toujours négatif, c'est à dire : $(\ x \mid y\ )^2 - \|x\|^2\|y\|^2 \leqslant 0$.

b) Il y a égalité si et seulement le discriminant est nul c'est à dire s'il existe λ annulant $\|\lambda x + y\|$.

c) On applique le a) avec le produit scalaire $(\ f \mid g\ ) = \displaystyle\int_0^a f(t)g(t)\,dt$.

3) On a $\varphi(x,0) = \dfrac{1}{2}\Big(N^2(x) - N^2(x) - N^2(0_E)\Big) = 0$ car φ est un produit scalaire. Donc $\varphi(x,0) = -\dfrac{1}{2}N^2(0_E)$.

On doit avoir $\varphi(x,x) = N^2(x)$. Or :

$$\varphi(x,-x) = -\varphi(x,x) = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{N^2(0_E)}_{=0} - N^2(x) - N^2(-x)\Big) = -N^2(x)$$

Partie 2

1) p est continue sur $[0,1]$ donc est bornée et atteint ses bornes :

$$\exists x_0, x_1 \in [0,1] \Big/ \forall x \in [0,1],\ \underbrace{p(x_0)}_{p_0} \leqslant p(x) \leqslant \underbrace{p(x_1)}_{p_1}$$

et on a $p_0 > 0$ car $p > 0$. C'est la même chose pour q.

2) a) $L(v) \in \mathbb{R}$ (forme) et on a :

$$L(\lambda u+v) = \int_0^1 f(t)\big(\lambda u+v\big)\, dt = \lambda \int_0^1 f(t)u(t)\, dt + \int_0^1 f(t)v(t)\, dt = \lambda L(u) + L(v)$$

b) $(\ u \mid v\ )$ est bilinéaire d'après la linéarité de l'intégrale et de la dérivation. La symétrie est triviale.

$$(\ u \mid u\ ) = \int_0^1 \Big(u^2(t) + u'^2(t)\Big)\, dt \geqslant 0$$

et $(\ u \mid u\ ) = 0 \Rightarrow \forall t \in [0,1],\ \big(u^2 + u'^2\big)(t) = 0$ à cause de la continuité de u et u' et du signe. Ceci implique bien $u \equiv 0$.

c) idem, sauf pour $b(u,u) = 0 \Rightarrow u \equiv 0$:

$$b(u,u) = \int_0^1 qu^2 + pu'^2 = 0 \Longrightarrow qu^2 + pu'^2 \equiv 0 \Longrightarrow pu'^2 \equiv 0$$

donc $u' \equiv 0$ car $p > 0$ donc u est une constante sur $[0,1]$, et nulle car $u(0) = u(1) = 0$.

3) a) On applique (I2c) :

$$L(v) \leqslant \underbrace{\sqrt{\int_0^1 f(t)^2\, dt}}_{\gamma}\ \underbrace{\sqrt{\int_0^1 v(t)^2\, dt}}_{\leqslant \int_0^1 \left(v(t)^2 + v'(t)^2\right)\, dt} \leqslant \gamma \|v\|$$

b) De même

$$\begin{aligned}
\big|b(u,v)\big| &\leqslant q_1 \int_0^1 \big|u(t)v(t)\big|\, dt + p_1 \int_0^1 \big|u'(t)v'(t)\big|\, dt \\
&\leqslant q_1 \sqrt{\int_0^1 u(t)^2\, dt}\sqrt{\int_0^1 v(t)^2\, dt} + p_1 \sqrt{\int_0^1 u'(t)^2\, dt}\sqrt{\int_0^1 v'(t)^2\, dt} \\
&\leqslant \underbrace{(q_1 + p_1)}_{\delta > 0} \|u\| \|v\|
\end{aligned}$$

4) a) $\displaystyle\int_0^x v'(t)\, dt = v(x) - v(0) = v(x)$. Mais :

$$\int_0^x v'(t)\, dt = \int_0^x 1 v'(t)\, dt \leqslant \sqrt{\int_0^x dt}\sqrt{\int_0^x v'(t)^2\, dt}$$

donc $v(x) \leqslant \sqrt{x}\sqrt{\int_0^1 v'(t)^2\,dt}$ d'où le résultat.

b) On en déduit :

$$\begin{aligned}\|v\|^2 = \int_0^1 \Big(v(t)^2 + v'(t)^2\Big)\,dt &\leqslant \int_0^1 t\Big(\int_0^1 v'(\tau)^2 d\tau\Big) + v'(t)\,dt \\ &\leqslant \int_0^1 v'(\tau)^2\,d\tau \underbrace{\int_0^1 t\,dt}_{1/2} + \int_0^1 v'(t)^2\,dt \leqslant \frac{3}{2}\int_0^1 v'(t)^2\,dt\end{aligned}$$

et d'autre part : $b(v,v) = \displaystyle\int_0^1 \Big(q(t)v(t)^2 + p(t)v'(t)^2\Big)\,dt \geqslant p_0 \int_0^1 v'(t)^2\,dt$, donc

$$\frac{3}{2}b(v,v) \geqslant p_0\frac{3}{2}\int_0^1 v'(t)^2\,dt \geqslant p_0\|v\|^2.$$

5) trivial puisque b est un produit scalaire.

6) a) u est C^1 par morceaux sur $[0,1]$ s'il existe une subdivision $a_0 = 0 < a_1 < \ldots < a_n = 1$ de $[0,1]$ telle que u est C^1 sur $]a_i, a_{i+1}[$ et u et u' ont des limites finies en a_i et a_{i+1}, $i = 0 \ldots n-1$.

On pose simplement $(\ u \mid v\ ) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}} u(t)v(t) + u'(t)v'(t)\,dt$ où $a_0, \ldots a_n$ est la réunion des subdivisions associées à u et v.

b) $b(v,v) = 0$ avec $v \in G \Longrightarrow \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\underbrace{\int_{a_i}^{a_{i+1}} qv^2 + pv'^2}_{\geqslant 0} = 0$ donc $\forall i = 0 \ldots n-1$,

$\displaystyle\int_{a_i}^{a_{i+1}} \underbrace{qv^2}_{\geqslant 0} + pv'^2 = 0$ donc $\displaystyle\int_{a_i}^{a_{i+1}} v'^2 = 0$ donc v est constante sur $]a_i, a_{i+1}[$ donc aussi sur $[a_i, a_{i+1}]$ puis sur $[0,1]$ par continuité.

<u>Partie 3</u>

1) Le problème est $\begin{cases} \forall x \in [0,1],\ \frac{d}{dx}\Big(e^{-\alpha x}u'(x)\Big) = 2n_0\pi\cos(2n_0\pi x) & (1) \\ u(0) = u(1) = 0 & (2)\end{cases}$

mais (1) $\Longleftrightarrow e^{-\alpha x}u'(x) = \sin(2n_0\pi x) + C$, donc $u'(x) = e^{\alpha x}\big(\sin(2n_0\pi x) + C\big)$ on en déduit que

$$\begin{aligned}u(x) &= \Im m \int e^{(\alpha+2in_0\pi)x}\,dx + \frac{C}{\alpha}e^{\alpha x} + D = \Im m\frac{e^{(\alpha+2in_0\pi)x}}{\alpha+2in_0\pi} + \frac{C}{\alpha}e^{\alpha x} + D \\ &= e^{\alpha x}\frac{\alpha\sin 2n_0\pi x - 2n_0\pi\cos 2n_0\pi x}{\alpha^2 + 4n_0^2\pi^2} + \frac{C}{\alpha}e^{\alpha x} + D\end{aligned}$$

et avec les conditions (2), on trouve alors :

$$C = \frac{2n_0\pi\alpha}{\alpha^2 + 4n_0^2\pi^2} \text{ et } D = 0$$

donc finalement

$$u(x) = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2 + 4n_0^2\pi^2}\Big[\alpha\sin(2n_0\pi x) - 2n_0\pi\cos(2n_0\pi x) + 2n_0\pi\Big]$$

2) Soit $v \in H$, c'est à dire C^1 avec $v(0) = v(1) = 0$.

$$\begin{aligned}
b(u,v) &= \int_0^1 \Big(\underbrace{q(x)u(x)}\,v(x) + p(x)u'(x)v'(x)\Big)\,dx \\
&= \int_0^1 \Big[\Big(f(x) + \frac{d}{dx}p(x)u'(x)\Big)v(x) + p(x)u'(x)v'(x)\Big]\,dx \\
&= L(v) + \underbrace{\int_0^1 \frac{d}{dx}\big(p(x)u'(x)\big)v(x)\,dx}_{\text{IPP}} + \int_0^1 p(x)u'(x)v'(x)\,dx \\
&= L(v) + \Big[\underbrace{(x)u'(x)v(x)}_{=0 \text{ car } v\in H}\Big]_0^1 - \int_0^1 p(x)u'(x)v'(x)\,dx + \int_0^1 p(x)u'(x)v'(x)\,dx \\
&= L(v)
\end{aligned}$$

On sait que (1) + (2) a au moins une solution, donc (3) aussi. D'après (II5), elle est unique.

3) a)

$$\begin{aligned}
J(u+w) &= \frac{1}{2}b(u+w, u+w) - L(u+w) \\
&= \frac{1}{2}\Big(b(u,u) + 2\overbrace{b(u,w)}^{L(w)} + b(w,w)\Big) - L(u) - L(w) \\
&= J(u) + \underbrace{\frac{1}{2}b(w,w)}_{\geqslant 0} \geqslant J(u)
\end{aligned}$$

donc, en posant $u + w = v$, on a bien

$$\forall v \in H,\ J(v) \geqslant J(u)$$

b) De même, $J(u_0 + \lambda w) = J(u_0) + \frac{1}{2}\lambda^2 b(w,w) + \lambda\big(b(u_0,w) - L(w)\big)$. On a donc, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{2}\lambda^2 b(w,w) + \lambda\big(b(u_0,w) - L(w)\big) \geqslant 0$$

en particulier, lorsque $\lambda \longrightarrow 0$, en prenant l'équivalent :

$$\lambda\big(b(u_0, w) - L(w)\big) \geqslant 0$$

donc $b(u_0, w) = L(w)$, sinon il y aurait changement de signe pour $\lambda > 0$ ou < 0.
4) a) On a $w - u = \big(w - \pi_W(u)\big) + \big(\pi_W(u) - u\big)$, donc par Pythagore, puisque $\big(w - \pi_W(u)\big) \perp \big(\pi_W(u) - u\big)$ pour le produit scalaire b :

$$\begin{aligned} b(w-u, w-u) &= \underbrace{b\big(w - \pi_W(u), w - \pi_W(u)\big)}_{\geqslant 0} + b\big(\pi_W(u) - u, \pi_W(u) - u\big) \\ &\geqslant b\big(\pi_W(u) - u, \pi_W(u) - u\big) \end{aligned}$$

b) "$\Rightarrow$"

$$b(u_W, v) = b(u, v) + \underbrace{b(u_W - u, v)}_{=0 \text{ car } \underbrace{(u_W - u)}_{\perp W} \perp \underset{\in W}{v}} = b(u, v) = L(v)$$

"$\Leftarrow$"
Réciproquement, on suppose $u_W \in W$ et $b(u_W, v) = L(v)$, $\forall v \in W$, alors :

$$\begin{aligned} & b\big(\pi_W(u) - u_W, \pi_W(u) - u_W\big) = 0 \ ? \\ &= \underbrace{b\big(\pi_W(u), \pi_W(u)\big)}_{L(\pi_W(u))} - 2\underbrace{b\big(\pi_W(u), u_W\big)}_{\substack{=L(\pi_W(u)) \\ \text{et } =L(u_W)}} + \underbrace{b(u_W, u_W)}_{L(u_W)} = 0 \end{aligned}$$

donc $\pi_W(u) - u_W = 0$ puisque b est un produit scalaire.
c) On a $\forall v \in W,\ b(u_W, v) = L(v) \Leftrightarrow \forall i \in [1, d],\ b(u_W, \varphi_i) = L(\varphi_i)$, soit, en posant $u_W = \sum_{j=1}^{d} \alpha_j b(\varphi_i, \varphi_j) = L(\varphi_j)$.
Ce système $d \times d$ a une unique solution puisque $u_W = \pi_W(u)$ est défini de manière unique.

Partie 4

1) a) φ_i est continue sur $[0, 1]$, $\varphi_i(0) = \varphi_i(1) = 0$ est φ_i est C^1 par morceaux.
b) Si $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} t_i \varphi_i(x)$, alors, en particulier, avec $x = x_i$, on a : $\varphi(x_i) = t_i$.
On en déduit que $\sum_{i=1}^{n} t_i \varphi_i = 0 \Rightarrow t_1 = \ldots = t_n = 0$, c'est à dire que la famille est libre.

c)

$$\begin{aligned}
b(\varphi_i, \varphi_j) &= \int_0^1 \Big[q(t)\varphi_i(t)\varphi_j(t) + p(t)\varphi_i'(t)\varphi_j'(t)\Big]\,dt \\
&= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \Big[q(t)\varphi_i(t)\varphi_j(t) + p(t)\varphi_i'(t)\varphi_j'(t)\Big]\,dt
\end{aligned}$$

mais, $\varphi_j \equiv 0$ sur $[x_{i-1}, x_{i+1}]$, ainsi que φ_j', donc $b(\varphi_i, \varphi_j) = 0$ (orthogonales).

2) a) Il reste seulement à calculer $b(\varphi_i, \varphi_{i+1})$ et $b(\varphi_i, \varphi_i)$:

$$\begin{aligned}
b(\varphi_i, \varphi_{i+1}) &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} e^{-\alpha t}\Big(-\frac{1}{h}\Big)\Big(\frac{1}{h}\Big)\,dt = \frac{1}{\alpha h^2}\Big[e^{-\alpha t}\Big]_{x_i}^{x_{i+1}} = \frac{e^{-\alpha i h}\big(e^{-\alpha h}-1\big)}{\alpha h^2} \\
b(\varphi_i, \varphi_i) &= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} e^{-\alpha t}\,\underbrace{\varphi_i'(t)^2}_{\frac{1}{h^2}}\,dt = -\frac{1}{\alpha h^2}\Big[e^{-\alpha t}\Big]_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} = \frac{e^{-\alpha(i-1)h}\big(1-e^{-2\alpha h}\big)}{\alpha h^2}
\end{aligned}$$

b) Le système (4) est ici : $\begin{cases} b(\varphi_1,\varphi_1)\alpha_1 + b(\varphi_1,\varphi_2)\alpha_2 = L(\varphi_1) \\ b(\varphi_2,\varphi_1)\alpha_1 + b(\varphi_2,\varphi_2)\alpha_2 = L(\varphi_2) \end{cases}$

avec $b(\varphi_1,\varphi_1) = \dfrac{1-e^{-2\alpha h}}{\alpha h^2}$, $b(\varphi_1,\varphi_2) = \dfrac{e^{-\alpha h}\big(e^{-\alpha h}-1\big)}{\alpha h^2}$ et $b(\varphi_2,\varphi_2) = \dfrac{e^{-\alpha h}\big(1-e^{-2\alpha h}\big)}{\alpha h^2}$.

On trouve pour le déterminant du système : $1+e^{-\alpha h}+e^{-2\alpha h} \neq 0$, donc le système est de Cramer.

3) a) On calcule $\displaystyle\int_y^t u''(z)\,dz = u'(t) - u'(y)$, puis :

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}\Big(\int_y^t u''(z)\,dz\Big)\,dy = u'(t)(x_i - x_{i-1}) - u(x_i) + u(x_{i-1})$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x}\Big(\int_{x_{i-1}}^{x_i}\Big(\int_y^t u''(z)\,dz\Big)\,dy\Big)\,dt = \frac{1}{h}\Big[\big(u(x) - u(x_{i-1})\big)\overbrace{(x_i - x_{i-1})}^{h} - \\
-u(x_i)(x - x_{i-1}) + u(x_{i-1})(x - x_{i-1})\Big]
\end{aligned}$$

d'autre part, pour $x \in [x_{i-1}, x_i]$,

$$\begin{aligned}
w_n(x) &= u(x_{i-1})\varphi_{i-1}(x) + u(x_i)\varphi_i(x) \\
&= u(x_{i-1})\Big(1 - \frac{x - x_{i-1}}{h}\Big) + u(x_i)\Big(1 + \frac{x - x_i}{h}\Big)
\end{aligned}$$

donc $u(x) - w_n(x) = u(x) - u(x_{i-1}) + u(x_{i-1})\dfrac{x - x_{i-1}}{h} - u(x_i)\dfrac{x - \overbrace{(x_i - h)}^{x_{i-1}}}{h}$
$= u(x) - u(x_{i-1}) - u(x_i)\dfrac{x - x_{i-1}}{h} + u(x_{i-1})\dfrac{x - x_{i-1}}{h}$.

On a bien l'égalité.

b) On applique à plusieurs reprises l'inégalité du (I2c) adaptée de la manière suivante :

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right)^2 \leqslant \left|\int_a^b f(t)^2\,dt\right|\left|\int_a^b g(t)^2\,dt\right|$$

vraie, même si $b < a$.

$$\begin{aligned}
\left|u(x)-w_n(x)\right| &\leqslant \frac{1}{h}\underbrace{\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} \underset{f(t)}{\overset{\|}{1}}\,dt\right)^{1/2}}_{\leqslant h^{1/2}}\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i}\Big(\underbrace{\int_{x_{i-1}}^{x_i}\Big(\int_y^t u''(z)\,dz\Big)\,dy}_{\overset{\|}{g(t)}}\Big)^2 dt\right)^{1/2}\\
&\leqslant \frac{1}{h^{1/2}}\left(\int_{x_{i-1}}^{x}\Big(\underbrace{\int_{x_{i-1}}^{x_i} dy}_{=h}\Big)\int_{x_{i-1}}^{x_i}\Big(\int_y^t u''(z)\,dz\Big)^2 dy\ dt\right)^{1/2}\\
&\leqslant \left(\int_{x_{i-1}}^{x}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\underbrace{\left|\int_y^t dz\right|}_{\leqslant h}\left|\int_y^t u''(z)^2\,dz\right| dy\ dt\right)^{1/2}\\
&\leqslant h^{\frac12}\left(\underbrace{\int_{x_{i-1}}^{x} dt}_{\leqslant h}\underbrace{\int_{x_{i-1}}^{x_i} dy}_{=h}\int_{x_{i-1}}^{x_i} u''(z)^2\,dz\right)^{\frac12} \leqslant h^{\frac32}\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} u''(z)^2\,dz\right)^{\frac12}
\end{aligned}$$

c) D'après le théorème fondamental d'intégration, on a pour $x \in]x_{i-1}, x_i[$:

$$u'(x) - w_n'(x) = \frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\Big(\int_y^t u''(z)\,dz\Big)\,dy$$

Par le même procédé que précédemment, on obtient :

$$|u'(x) - w_n'(x)| \leqslant h^{\frac12}\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} u''(z)^2\,dz\right)^{\frac12}$$

4) On a :

$$\begin{aligned}
\|u-w_n\|^2 &= \int_0^1 \big(u(t)-w_n(t)\big)^2 + \big(u'(t)-w_n'(t)\big)^2\,dt\\
&= \sum_{i=1}^{n+1}\int_{x_{i-1}}^{x_i} \big(u(t)-w_n(t)\big)^2 + \big(u'(t)-w_n'(t)\big)^2\,dt\\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n+1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(h^3\int_{x_{i-1}}^{x_i} u''(z)^2\,dz + h\int_{x_{i-1}}^{x_i} u''(z)^2\,dz\right)dt\\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n+1}(h^3+h)\int_{x_{i-1}}^{x_i} u''(z)^2\,dz\,\underbrace{\int_{x_{i-1}}^{x_i} dt}_{=h} \leqslant h^2(h^2+1)\int_0^1 u''(z)^2\,dz
\end{aligned}$$

Comme $0 < h \leqslant \dfrac{1}{2}$, on a $0 < h^2 + 1 \leqslant \dfrac{5}{4}$, donc :

$$\|u - w_n\|^2 \leqslant \frac{5h^2}{4} \int_0^1 u''(z)^2 \, dz$$

d'où le résultat. Autrement dit, $w_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} u$.