DM 4

Dans tous le problème, p, q et f désignent trois fonctions définies et continues sur $[0,1]$ telles que p est de classe C^1 (continûment dérivable) sur $[0,1]$ et vérifiant :

$$\forall x \in [0,1], \quad p(x) > 0 \text{ et } q(x) \geqslant 0$$

La partie 1 ne contient que des questions de cours. Elle est donnée à titre indicatif et n'est pas à rédiger sur la copie.

Partie 1

1) Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire noté $(\ |\ )$ et dont la norme euclidienne associée est notée $\|\ \|$. Prouver que :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad 2\big(x \mid y\big) = \|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2.$$

2) a) Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \big|\big(x \mid y\big)\big| \leqslant \|x\|\|y\|.$$

(on pourra s'intéresser à la fonction $\lambda \mapsto \|\lambda x + y\|^2$ de la variable réelle λ.)

b) Montrer que $\big|\big(x \mid y\big)\big| = \|x\|\|y\|$ si et seulement si $\{x,y\}$ est une famille liée de E.

c) En déduire que si f et g sont deux fonctions réelles continues sur $[0,a]$ (où a est un réel strictement positif),

$$\left|\int_0^a f(t)g(t)\,dt\right| \leqslant \sqrt{\left(\int_0^a f(t)^2\,dt\right)\left(\int_0^a g(t)^2\,dt\right)}.$$

3) Soit E un espace vectoriel réel, N une application de E dans $\mathbb{R}$, à valeurs positives ou nulles et vérifiant $\forall x \in E$, $N(x) = N(-x)$.

On pose $\varphi(x,y) = \dfrac{1}{2}\big(N^2(x+y) - N^2(x) - N^2(y)\big)$ et on suppose que φ est un produit scalaire.

Après avoir vérifié que $N(0_E)$ est nul (où 0_E désigne le vecteur nul de E), prouver que N est la norme euclidienne associée à φ.

Partie 2

1) Justifier l'existence de trois réels positifs p_0, p_1, et q_1 tels que

$$\forall x \in [0,1], \quad 0 < p_0 \leqslant p(x) \leqslant p_1 \text{ et } q(x) \leqslant q_1.$$

2) Soit H l'espace vectoriel réel formé des fonctions réelles de classe C^1 sur $[0,1]$ s'annulant en 0 et en 1, c'est à dire :

$$H = \Big\{ u \in C^1\big([0,1],\mathbb{R}\big),\ u(0) = u(1) = 0 \Big\}.$$

Pour tout couple (u,v) de fonctions de H, on pose :

$$\begin{aligned}
\big(u \mid v\big) &= \int_0^1 \Big(u(t)v(t) + u'(t)v'(t) \Big)\, dt, \\
b(u,v) &= \int_0^1 \Big(q(t)u(t)v(t) + p(t)u'(t)v'(t) \Big)\, dt, \\
L(v) &= \int_0^1 f(t)v(t)\, dt.
\end{aligned}$$

a) Vérifier que L est une forme linéaire sur H.

b) Montrer que $(u,v) \mapsto \big(u \mid v\big)$ est un produit scalaire sur H. On pose alors :

$$\|u\| = \sqrt{\big(u \mid u\big)}.$$

c) Montrer que $(u,v) \mapsto b(u,v)$ est un produit scalaire sur H.

3) a) Prouver, en utilisant la question **I2c** l'existence d'un réel γ positif tel que :

$$\forall v \in H, |L(v)| \leqslant \gamma \|v\|.$$

b) Prouver de même l'existence d'un réel δ strictement positif tel que :

$$\forall (u,v) \in H^2,\ |b(u,v)| \leqslant \delta \|u\| \|v\|.$$

4) a) Prouver, à l'aide de la question **I2c** que pour toute fonction v de H et pour tout réel x de $[0,1]$,

$$v^2(x) \leqslant x \int_0^1 v'^2(t)\, dt.$$

b) En déduire que :

$$\forall v \in H,\ p_0 \|v\|^2 \leqslant \frac{3}{2} b(v,v)$$

5) Soient u_1 et u_2 des fonctions de H vérifiant $\forall v \in H$, $b(u_1, v) = L(v) = b(u_2, v)$. Prouver que $u_1 = u_2$.

6) Soit G l'espace vectoriel réel formé des fonctions réelles continues, C^1 par morceaux (c'est à dire continues et dont la dérivée est continue par morceaux) et s'annulant en 0 et en 1.

a) Montrer que $\left(u \mid v\right)$ et $b(u, v)$ peuvent être définies lorsque u et v sont des éléments de G.

b) Vérifier que $b(v, v) = 0$ avec $v \in G$, si et seulement si $\forall x \in [0, 1]$, $v(x) = 0$.

On admet que $(u, v) \mapsto \left(u \mid v\right)$ et $(u, v) \mapsto b(u, v)$ sont encore des produits scalaires sur G et on continue à noter $\| \ \|$ la norme euclidienne associée au produit scalaire $(\ |\ )$.

Partie 3

On s'intéresse aux solutions de classe C^2 sur $[0, 1]$ de :

$$\forall x \in [0, 1], \ -\frac{d}{dx}\Big(p(x)u'(x)\Big) + q(x)u(x) = f(x) \tag{1}$$

vérifiant de plus

$$u(0) = u(1) = 0 \tag{2}$$

On admet dans toute la suite que les fonctions p, q et f sont choisies de telle sorte qu'il existe au moins une solution de l'équation différentielle (1) vérifiant les conditions (2).

1) Résoudre le problème lorsque $p(x) = e^{-\alpha x}$ (avec α réel non nul), $q(x) = 0$ et $f(x) = -2n_0\pi\cos(2n_0\pi x)$ (avec n_0 entier naturel non nul).

2) On revient au cas général. Soit u une solution du problème posé, c'est à dire vérifiant (1) et (2). Prouver que :

$$\forall v \in H, b(u, v) = L(v) \tag{3}$$

En déduire que l'équation (3) admet une unique solution u dans H.

3) On pose, pour tout élément v de H, $J(v) = \dfrac{1}{2}b(v, v) - L(v)$ et on désigne par u l'unique solution de (3) dans H.

a) En calculant $J(u + w)$ avec $w \in H$, prouver que

$$\forall v \in H, \ J(u) \leqslant J(v)$$

b) Réciproquement, soit u_0 un élément de H tel que $\forall v \in H$, $J(u_0) \leqslant J(v)$. Établir, en calculant $J(u_0 + \lambda w)$ pour tout réel λ que :

$$\forall w \in H, \ b(u_0, w) = L(w).$$

u est donc l'unique fonction de H réalisant le minimum de J sur H.

4) On désigne par W un sous-espace vectoriel de G de dimension d, de base $(\varphi_i)_{1\leqslant i\leqslant d}$ et par π_W la projection orthogonale sur W pour le produit scalaire b.

a) Montrer que $\forall w \in W$, $b\big(\pi_W(u)-u, \pi_W(u)-u\big) \leqslant b(w-u, w-u)$.

b) Prouver que $u_W = \pi_W(u)$ si et seulement si u_W est un élément de W et vérifie :

$$\forall v \in W,\ b(u_W, v) = L(v).$$

c) Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ les composantes de u_W dans la base $(\varphi_i)_{1\leqslant i\leqslant d}$. Montrer que ces composantes sont solutions du système :

$$\forall i \in [1, d] \sum_{j=1}^{d} b(\varphi_i, \varphi_j)\alpha_j = L(\varphi_i). \tag{4}$$

Prouver que ce système est un système de Cramer.

Partie 4

Soit n un entier naturel non nul ; on pose $h = \dfrac{1}{n+1}$ et pour tout entier naturel i, $x_i = ih$. De plus, pour i compris entre 1 et n, on désigne par φ_i la fonction définie par :

$$\begin{cases} x \in [x_{i-1}, x_{i+1}] \Rightarrow \varphi_i(x) = 1 - \dfrac{|x-x_i|}{h} \\ x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \Rightarrow \varphi_i(x) = 0 \end{cases}$$

1) a) Tracer le graphe d'une fonction φ_i et vérifier que pour tout i, φ_i est un élément de G.

b) Soit W_n le sous-espace de G engendré par la famille $\{\varphi_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$.

Soit $\varphi = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i\varphi_i$ un élément de W_n. Quelle est la valeur de t_i ? En déduire que les fonctions $(\varphi_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ forment une base de W_n.

c) Prouver que si $|j-i| \geqslant 2$, $b(\varphi_i, \varphi_j) = 0$.

2) Dans cette question, $p(x) = e^{-\alpha x}$ (avec α réel non nul) et $q(x) = 0$.

a) Calculer $b(\varphi_i, \varphi_j)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$.

b) Calculer alors le déterminant du système (4) lorsque $n = 2$ et retrouver que dans ce cas particulier ce système est de Cramer.

3) On pose $w_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u(x_i)\varphi_i$.

a) Établir l'égalité suivante, pour $1 \leqslant i \leqslant n+1$:

$$\forall x \in [x_{i-1}, x_i], u(x) - w_n(x) = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\int_{y}^{t} u''(z)\, dz \right) dy \right) dt$$

b) En déduire, à l'aide d'une inégalité donnée par la question **I2c** que :

$$\forall x \in [x_{i-1}, x_i], |u(x) - w_n(x)| \leqslant h^{\frac{3}{2}} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} \big(u''(z)\big)^2 dz \right)^{\frac{1}{2}}.$$

c) Prouver de même que :

$$\forall x \in [x_{i-1}, x_i], \left|u'(x) - w_n'(x)\right| \leqslant h^{\frac{1}{2}} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} \big(u''(z)\big)^2 dz \right)^{\frac{1}{2}}.$$

4) Montrer alors que :

$$\|u - w_n\| \leqslant \frac{\sqrt{5}h}{2} \left(\int_0^1 \big(u''(z)\big)^2 dz \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Quelle interprétation vous suggère cette inégalité ?

Appendice

Ce problème provient de la modélisation des vibrations de cordes fixées aux deux extrémités. La recherche d'une solution sous forme d'une série conduit à la résolution d'un problème de Sturm-Liouville (partie III) où u est le déplacement vertical en un point d'abscisse x, p et q sont des caractéristiques de la corde et f est liée aux forces appliquées à la corde.