Correction DM 3

Exercice 1 :

1) a) Si $f \in F$, alors $\displaystyle\int_0^1 f(t)^2\,dt$ converge. Mais d'après Cauchy-Schwarz, on a :

$$\int_\varepsilon^1 \left|f(t)\right| dt \leqslant \left(\int_\varepsilon^1 1\,dt\right)^{1/2} \left(\int_\varepsilon^1 f(t)^2\,dt\right)^{1/2}$$

et en faisant tendre ε vers 0, on en déduit la convergence absolue de $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$, donc $f \in E$.

La fonction nulle appartient à F. Vérifions la stabilité : soient $f, g \in F$, on a $(f+g)^2 = f^2 + 2fg + g^2$. Or $\int_0^1 f^2$ et $\int_0^1 g^2$ convergent et toujours d'après Cauchy-Schwarz :

$$\int_0^1 \left|f(t)g(t)\right| dt \leqslant \left(\int_0^1 f(t)^2\,dt\right)^{1/2} \left(\int_0^1 g(t)^2\,dt\right)^{1/2}$$

donc $\int_0^1 fg$ converge ainsi que $\int_0^1 (f+g)^2$.
Pour $\lambda f \in F$, $\lambda \in \mathbb{R}$, c'est trivial.
F est donc un sous-espace de E et donc à fortiori un espace vectoriel.

Pour les questions suivantes, la continuité des fonctions sur $]0,1]$ est claire : on n'étudie donc que la convergence des intégrales en 0.

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ converge $\Longleftrightarrow \alpha < 1$.
$\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^{2\alpha}}$ converge $\Longleftrightarrow 2\alpha < 1 \Longleftrightarrow \alpha < \frac{1}{2}$.

c) en 0, on a $\dfrac{\sin t}{t^\alpha} \sim \dfrac{1}{t^{\alpha-1}} \geqslant 0$, donc l'intégrale converge si et seulement si $\alpha - 1 < 1$, c'est à dire $\alpha < 2$ (appartenance à E).

De même, on a $\dfrac{\sin^2 t}{t^{2\alpha}} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t^{2\alpha-2}} \geqslant 0$ donc l'intégrale converge si et seulement si $2\alpha - 2 < 1$ c'est à dire $\alpha < \dfrac{3}{2}$ (appartenance à F).

d) On a $\left|(\ell n\, t)^n\right| \ll \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ d'où la convergence absolue de l'intégrale. Cette fonction appartient à E et à F.

2) a) La continuité est claire. De plus, on a $f(t) = \dfrac{1}{t}\Big(\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} - 1\Big)\cdot$

– en 0 : on fait un développement limité :

$$f(t) = \frac{1}{t}\Big(\frac{t^2}{2} + o(t^2)\Big) \sim \frac{t}{2}$$

et on a un faux problème.

– en 1, on a

$$f(t) = \frac{1}{t}\frac{1-\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-t^2}} \sim \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-t}} \geqslant 0$$

d'où la convergence de l'intégrale par le critère d'équivalence.

Posons $t = \cos\theta$, avec $\theta \in \Big[0, \dfrac{\pi}{2}\Big]$, $dt = -\sin\theta\, d\theta$:

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos\theta}\Big[\frac{1}{\sin\theta} - 1\Big]\sin\theta\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta - 1}{\cos\theta}\, d\theta$$

Posons maintenant $u = \tan\dfrac{\theta}{2} \in [0,1]$, $\theta = 2\,\mathrm{Arc}\tan u$, $d\theta = \dfrac{2du}{1+u^2}$:

$$2\int_0^1 \frac{\frac{2u}{1+u^2} - 1}{\frac{1-u^2}{1+u^2}}\frac{du}{1+u^2} = 2\int_0^1 \frac{1-u}{(1+u^2)(1+u)}\, du = 2\int_0^1 \Big[\frac{1}{1+u} - \frac{u}{1+u^2}\Big]\, du$$

qui donne la valeur $\ell n\, 2$.

b) De même, on a en 0 : $f(t) \sim \ell n\, t$ d'intégrale convergente, et en 1 :

$$f(t) \sim \frac{t-1}{2\sqrt{2}\sqrt{1-t}} \sim -\frac{\sqrt{t-1}}{2\sqrt{2}}$$

il y a faux problème.

On pose $x = \sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}}$, donc $t(x^2+1) = 1 - x^2$, $t = \dfrac{1-x^2}{1+x^2} \in [0,1]$ et $dt = -\dfrac{4x}{\big(1+x^2\big)^2}dx$

On obtient $I = \displaystyle\int_0^1 \ell n \frac{1-x^2}{1+x^2}\,dx = (\cdots) = \ell n\,2 - \frac{\pi}{2}$, en décomposant le ℓn et en intégrant par parties le $\ell n(1+x^2)$.

Exercice 2 :

1) a) On a $\deg N_k = k$ (famille échelonnée), donc la famille $(N_0, \ldots, N_n)$ est libre. C'est une base car $\mathrm{card}(N_0, \ldots, N_n) = n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$.

b) D'abord, $\Delta(N_0) = 0$. Ensuite, pour $k > 0$,

$$\begin{aligned}
\Delta(N_k) &= N_k(X+1) - N_k(X) \\
&= \frac{1}{k!}\Big[(X+1)X(X-1)\ldots(\underbrace{X-k+2}_{X-(k-2)}) - X(X-1)\ldots(\underbrace{X-k+1}_{X-(k-1)})\Big] \\
&= \frac{1}{k!}X(X-1)\ldots(X-k+2)\Big[X+1-X+k-1\Big] \\
&= \frac{X(X-1)\ldots(X-k+2)}{(k-1)!} = N_{k-1}(X)
\end{aligned}$$

2) $\Delta(P+Q)(X) = (P+Q)(X+1) - (P+Q)(X) =$

$$= \underbrace{P(X+1) - P(X)}_{\Delta(P)(X)} - \underbrace{Q(X+1) - Q(X)}_{\Delta(Q)(X)}$$

et $\Delta(\lambda P)(X) = (\lambda P)(X+1) - (\lambda P)(X) = \lambda(P(X+1) - P(X)) = \lambda \Delta P$.

Donc Δ est linéaire. C'est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ car $P \in \mathbb{R}[X] \Longrightarrow \Delta P \in \mathbb{R}[X]$ (polynôme).

<u>Noyau de Δ</u> : On a $\Delta P = 0 \Longleftrightarrow P(X+1) = P(X)$ (égalité formelle : $\forall X$)

Si P n'est pas constant, alors P a au moins une racine $z_0 \in \mathbb{C}$ (d'Alembert) et par conséquent z_0, z_0+1, z_0+2, etc... forment une suite infinie de racines de P, ce qui est impossible (degré).

Donc P est constant ($\in \mathbb{R}$) : $\boxed{\ker \Delta = \mathbb{R}}$

<u>Image de Δ</u> : $\mathrm{Im}\,\Delta = \Delta\big(\mathbb{R}[X]\big) = \Delta\big(\langle N_0, N_1 \ldots\rangle\big) = \langle \Delta(N_0), \Delta(N_1), \ldots\rangle = \langle 0, N_0, N_1, \ldots\rangle = \mathbb{R}[X]$ (surjective)

3) a) Pour $k = 0 \ldots n$, on a $\Delta(N_k) = N_{k-1} \in \mathbb{R}_n[X]$ donc $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par Δ.

b) $\ker \Delta_n = \ker \Delta \cap \mathbb{R}_n[X] = \mathbb{R}$ mais attention : $\mathrm{Im}\,\Delta_n = \Delta_n(\mathbb{R}_n[X]) = \Delta(\langle N_0, \ldots, N_n\rangle) = \langle N_0, \ldots, N_{n-1}\rangle = \mathbb{R}_{n-1}[X]$

(noter qu'ici la formule du rang est respectée).

c) On écrit en colonne les coordonnées des images de $N_0, \ldots, N_n$ par Δ :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$\Delta(N_k) = N_{k-1}$, $\Delta^2(N_k) = N_{k-2}$, $\ldots$, $\Delta_{k+1}(N_k) = 0$ donc $\Delta^{n+1}(N_k) = 0$ pour tout $k = 0 \ldots n$.

Δ^{n+1} est linéaire et annule la base $(N_0, \ldots N_n)$ donc est nul.

d) Δ_n n'a qu'une valeur propre à savoir 0. S'il était diagonalisable, il serait déjà nul, ce qui n'est pas le cas.

4) a) Notons $P = \lambda_0 N_0 + \lambda_1 N_1 + \ldots \lambda_n N_n$ la décomposition de P sur la base :

$$\begin{aligned} P(0) &= \lambda_0 N_0(0) = \lambda_0 \text{ (car les polynômes } N_1, \ldots, N_n \text{ s'annulent en 0)} \\ \Delta_n(P)(0) &= \lambda_1 N_0(0) + \underbrace{\ldots + \lambda_n N_{n-1}(0)}_{0} = \lambda_1 \\ &\vdots \\ \Delta_n^{n-1}(P)(0) &= \lambda_{n-1} N_0(0) + \lambda_n \overbrace{N_1(0)} = \lambda_{n-1} \\ \Delta_n^n(P)(0) &= \lambda_n N_0(0) = \lambda_n \end{aligned}$$

b) On procède par récurrence sur j :

$\underline{j = 0}$: $\Delta^0 P = P = \underbrace{\binom{0}{0} (-1)^0}_{1} P$

$\underline{j = 1}$: $\Delta^1 P = P(X+1) - P(X) = \binom{1}{0} (-1)^1 P(X) + \binom{1}{1} (-1)^2 P(X+1)$

$\underline{j \longrightarrow j+1}$: $$\Delta^{j+1} P = \Delta(\Delta^j P) = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} (-1)^{j+k} P(X + \overbrace{k+1}^{l}) - \\ - \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} (-1)^{j+k} P(X+k)$$

$$\Delta^{j+1}P(X) = \sum_{l=1}^{j+1} \binom{j}{l-1} \underbrace{(-1)^{j+l-1}}_{-(-1)^{j+l}} P(X+l) - \cdots$$

$$= \underbrace{\binom{j}{j}}_{\binom{j+1}{j+1}} (-1)^{2j} P(X+j+1) - \sum_{k=1}^{j} \underbrace{\left(\binom{j}{k-1} + \binom{j}{k}\right)}_{\binom{j+1}{k}} (-1)^{j+k} P(X+k)$$

$$- \underbrace{\binom{j}{0}}_{\binom{j+1}{0}} (-1)^j P(X)$$

$$= \sum_{k=0}^{j+1} \binom{j+1}{k} (-1)^{j+k-1} P(X+k)$$

c) $(i) \Longrightarrow (ii)$: on calcule $\Delta^j(P)(0) \overset{(b)}{=} \sum_{k=0}^{j} \underbrace{\binom{j}{k} (-1)^{j+k}}_{\in \mathbb{Z}} \underbrace{P(k)}_{\in \mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}$.

$(ii) \Longrightarrow (i)$: $P(k) \overset{a)}{=} \sum_{j=0}^{n} \underbrace{\Delta^j(P)(0) N_j(k)}_{\in \mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}$.

5) a) On a vu que $\operatorname{Im} \Delta = \mathbb{R}[X]$, ce qui implique l'existence de la famille B_i. On a vu aussi que $\ker \Delta = \mathbb{R}$, donc si une autre famille C_i vérifie les mêmes conditions que les B_i, alors :

$$\Delta(B_i) = X^i = \Delta(C_i) \Longrightarrow B_i - C_i \in \mathbb{R}$$

et avec $B_i(0) = C_i(0) = 0$, on en déduit que $B_i = C_i$.

b) D'après le 4a), $B_0(X) = \sum_{j=0}^{n} \underbrace{\underbrace{\Delta^j}_{\Delta^{j-1}\circ\Delta} (B_0)}_{\Delta^{j-1}(1)}(0) N_j(X) = \underbrace{B_0(0)}_{=0} N_0(X) + \Delta^0(1) N_1(X)$

donc $B_0 = N_1$.

De même, on $\Delta(B_1) = X$, puis, $\Delta(X) = 1$, $\Delta^2(X) = 0$, donc $B_1 = N_2$.

$\Delta(B_2) = X^2$ et $\Delta(X^2) = 2X + 1 \Longrightarrow \Delta(X^2)(0) = 1$ et $\Delta^2(X^2) = 2$, donc $B_2 = N_2 + 2N_3$.

Enfin, $\Delta(B_3) = X^3$, $\Delta(X^3) = 3X^2 + 3X + 1 \Longrightarrow \Delta(X^3)(0) = 1$, $\Delta^2(X^3) = 6X + 6 \Longrightarrow \Delta(X^3)(0) = 6$, donc $B_3 = N_2 + 6N_3 + 6N_4$.

c) On a $\sum_{k=0}^{m} k^3 = \sum_{k=0}^{m} \Delta(B_3)(k) = \sum_{k=0}^{m} \Big[B_3(k+1) - B_3(k)\Big] \underset{\text{télescopage}}{=} B_3(m+1) - B_3(0)$

$$
\begin{aligned}
&= N_2(m+1) + 6N_3(m+1) + 6N_4(m+1) \\
&= \frac{m(m+1)}{2} + m(m-1)(m+1) + \frac{m(m+1)(m-1)(m-2)}{4} \\
&= \frac{m(m+1)}{4}\Big[\underbrace{2 + 4(m-1) + m^2 - 3m + 2}_{m^2+m}\Big], \text{ soit :}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\sum_{k=0}^{m} k^3 = \frac{m^2(m+1)^2}{4}}
$$