

Correction DM 2

Partie 1

1) C'est une application directe de la formule du binôme :

- Pour $f(x) = 1$, $f_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x+1-x)^n = 1$.

- Pour $f(x) = x$, $f_n(x) = \sum_{k=0}^n \underbrace{\binom{n}{k} \frac{k}{n}}_{\binom{n-1}{k-1}} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{k+1} (1-x)^{n-1-k} = x$.
(mettre x en facteur)

2) On calcule d'abord

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) \left[x^{k-1} (1-x)^{n-k} - (n-k) x^k (1-x)^{n-k-1} \right] \\ \frac{x(1-x)}{n} f'_n(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n+1-k} \\ &\quad - x \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{n-k}{n} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= (1-x)g_n(x) - x f_n(x) + x g_n(x) = g_n(x) - x f_n(x) \end{aligned}$$

3) a) Appliquons ce qui précède avec $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$:

$$g_n(x) = \frac{x(1-x)}{n} f'_n(x) + x f_n(x) = \frac{x(1-x)}{n} + x^2 = x^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{x}{n}$$

b) $|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{x(1-x)}{n} \right| \leq \frac{1}{4n}$.

4) Il suffit de développer $\left(\frac{k}{n} - x\right)^2 = \frac{k^2}{n^2} - 2x \frac{k}{n} + x^2$; avec la somme, on obtient :

$$\frac{x(1-x)}{n} + x^2 - 2x \cdot x + x^2 = \frac{x(1-x)}{n}$$

Partie 2

$$1) f_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [e^{1/n}]^k x^k (1-x)^{n-k} = (xe^{1/n} + 1 - x)^n.$$

$$2) f_n(x) = \exp \left[\underbrace{n \ln(1 + \underbrace{x(e^{1/n} - 1)})}_{\substack{\rightarrow 0 \\ \sim x(e^{1/n} - 1) \sim \frac{x}{n}}} \right] \rightarrow e^x$$

$$3) e^u - 1 = u + \frac{u^2}{2} + o(u^2) \text{ donc } 1 + x(e^u - 1) = 1 + \underbrace{ux + \frac{u^2 x}{2} + o(u^2)}_{v \rightarrow 0}, \text{ puis}$$

$$\ln(1+v) = v - \frac{v^2}{2} + o(v^2) \text{ avec } v^2 = u^2 x^2 + o(u^2), \text{ donc}$$

$$\boxed{\ln(1+v) = ux + \frac{u^2}{2} x(1-x) + o(u^2)}$$

$$b) f_n(x) = e^{n \ln(1+x(e^{1/n}-1))}, \text{ or } n \ln(\dots) = x + \frac{x(1-x)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

$$e^{n \ln(\dots)} = e^x \left[1 + \frac{x(1-x)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right]$$

$$\text{puis } f_n(x) - e^x = e^x \left[\frac{x(1-x)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right] \sim \frac{x(1-x)}{2n} e^x.$$

$$4) \psi(x) = n \ln(x(e^{1/n} - 1) + 1) - x$$

ψ est continue, dérivable sur $[0, 1]$ et $\psi(0) = \psi(1) = 1$, donc ψ' s'annule entre 0 et 1 par le théorème de Rolle.

$$\psi'(x) = \frac{n(e^{1/n} - 1)}{x(e^{1/n} - 1) + 1} - 1 = \frac{n(e^{1/n} - 1) - x(e^{1/n} - 1) - 1}{x(e^{1/n} - 1) + 1}$$

dont le numérateur est du premier degré en x et décroissant d'où le tableau :

x	0	x_n	1		
$\psi'(x)$		+	0	-	
$\psi(x)$	0	\nearrow	$\psi(x_n)$	\searrow	0

$$5) \text{ On a } f_n(x) = \exp \left[\underbrace{n \ln(n(e^{1/n} - 1) + 1)}_{\psi(x)+x} \right] \text{ or } e^x \leq f_n(x) \leq e^{x+\psi(x_n)}, \text{ donc}$$

$$0 \leq f_n(x) - e^x \leq \underbrace{e^x}_{\leq e} [e^{\psi(x_n)} - 1]$$

6) On a $x_n = n - \frac{1}{e^{1/n} - 1}$ d'où

$$\begin{aligned}\psi(x_n) &= n \ln \left[\left(n - \frac{1}{e^{1/n} - 1} \right) (e^{1/n} - 1) + 1 \right] - n + \frac{1}{e^{1/n} - 1} \\ &= n \ln \left[n(e^{1/n} - 1) - 1 + 1 \right] - n + \frac{1}{e^{1/n} - 1} \\ e^{1/n} - 1 &= \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ n(\dots) &= 1 + \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{v \rightarrow 0} \quad \text{avec } v^2 = \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ \ln(1+v) &= \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2n} + \frac{1}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

donc $\boxed{n \ln(1+v) = \frac{1}{2} + \frac{1}{24n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}$. Puis :

$$\begin{aligned}n - \frac{1}{e^{1/n} - 1} &= n - \frac{1}{\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} \\ &= n \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} \right) \\ &= n \left[1 - \left(1 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2} + \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

et donc $\psi(x_n) = \frac{1}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$; $e^{\psi(x_n)} = 1 + \frac{1}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ et finalement

$$\boxed{e^{\psi(x_n)} - 1 \sim \frac{1}{8n}}$$

Partie 3

1) a) On intègre par parties en dérivant $(1-x)^{n-k}$:

$$I_n(k) = \frac{1}{k+1} \underbrace{\left[x^{k+1}(1-x)^{n-k} \right]_0^1}_{=0 \text{ si } 0 \leq k < n} + \frac{n-k}{k+1} I_n(k+1)$$

On a donc la relation de récurrence :

$$\boxed{I_n(k+1) = \frac{k+1}{n-k} I_n(k), \quad 0 \leq k < n}$$

Partant de $I_n(0) = \int_0^1 (1-x)^n dx = \frac{1}{n+1}$, on en déduit successivement :

$$I_n(1) = \frac{1}{n} \frac{1}{n+1}$$

$$I_n(2) = \frac{2}{n-1} \frac{1}{n} \frac{1}{n+1}$$

$$I_n(3) = \frac{3}{n-2} \frac{2}{n-1} \frac{1}{n} \frac{1}{n+1}$$

⋮

$$I_n(k) = \frac{k(k-1)\dots 1}{(n-k+1)(n-k+2)\dots n(n+1)} = \frac{k!(n-k)!}{(n+1)n!} = \frac{1}{(n+1) \binom{n}{k}}$$

b) $\int_0^1 f_n(x) dx = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{(n+1) \binom{n}{k}} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \rightarrow \int_0^1 f(x) dx$
 car on reconnaît la méthode des rectangles.

2) a) Si $x, x' \in [0, 1]$, on a $|f(x) - f(x')| \leq \sup_{t \in [0,1]} |f'(t)| |x' - x|$. Il suffit donc de prendre $k = \sup_{t \in [0,1]} |f'(t)|$ qui existe car f' est continue sur le segment $[0, 1]$.

- si $|x' - x| \leq \alpha$, alors $|f(x') - f(x)| \leq k|x' - x| \leq k\alpha \leq k\alpha + 2\frac{M_0}{\alpha^2}(x' - x)^2$
 - si $|x' - x| > \alpha$, alors $|f(x') - f(x)| \leq |f(x')| + |f(x)| \leq 2M_0 \leq k\alpha + 2M_0\frac{(x' - x)^2}{\alpha^2}$.

b) On a

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right] \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left(k\alpha + \frac{2M_0}{\alpha^2} \left| \frac{k}{n} - x \right|^2 \right) \\ &\leq k\alpha + \frac{2M_0}{\alpha^2} \frac{x(1-x)}{n} \leq 1/4 \end{aligned}$$

c) Posons $\varphi(\alpha) = k\alpha + \frac{M_0}{2n\alpha^2}$, alors on a $\varphi'(\alpha) = k - \frac{M_0}{n\alpha^3}$ qui s'annule pour

$\alpha_n = \sqrt[3]{\frac{M_0}{kn}}$, d'où le tableau

α	0	$\sqrt[3]{\dots}$	$+\infty$
$\varphi'(\alpha)$		0	+
$\varphi(\alpha)$	$+\infty$	\searrow	\nearrow $+\infty$

où $m = k\sqrt[3]{\frac{M_0}{kn}} + \frac{M_0}{2n\left(\frac{M_0}{kn}\right)^{2/3}} \leq \frac{A}{\sqrt[3]{n}}$. On retrouve alors que :

$$\left| \int_0^1 f_n - \int_0^1 f \right| = \left| \int_0^1 f_n - f \right| \leq \frac{A}{\sqrt[3]{n}} \rightarrow 0$$

c'est à dire que $\int_0^1 f_n \rightarrow \int_0^1 f$.

3) a) C'est une application directe de la formule de Taylor-Lagrange à f entre x et x' à l'ordre 2.

b) $f_n(x) - f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) - \left(\frac{k}{n} - x\right) \right] x^k (1-x)^{n-k}$, donc, en utilisant le a), puis (3) :

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{M_2}{2} \left| \frac{k}{n} - x \right|^2 x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{M_2}{2} \frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{M_2}{8n}$$