DM 2

Le problème a pour but l'étude d'un algorithme d'approximation de fonctions continues sur $[0,1]$ par des polynômes.

Notation

On associe à tout entier naturel n non nul et à toute fonction f continue sur $[0,1]$, la fonction polynôme, notée f_n définie par :

$$\forall x \in [0,1], \quad f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}. \tag{1}$$

$\binom{n}{k}$ étant le coefficient du binôme.

Partie 1

Etude des fonctions f_n associées à $f : x \mapsto x^2$

Soit n un entier supérieur ou égal à 1.

1. Déterminer la fonction polynôme f_n associée à f dans les deux cas particuliers suivants :

a) $f(x) = 1$.

b) $f(x) = x$.

2. f désignant une fonction numérique continue sur $[0,1]$, on note g la fonction définie sur $[0,1]$ par $g(x) = x \cdot f(x)$, f_n et g_n, les fonctions respectivement associées à f et g et f'_n la dérivée de f_n.

Vérifier que : $\forall x \in [0,1], \quad \dfrac{x(1-x)}{n} f'_n(x) = g_n(x) - x f_n(x) \qquad (2)$

3. On suppose que $f(x) = x^2$.

a) Déterminer $f_n(x)$.

b) Calculer $\sup\limits_{x \in [0,1]} \left| f_n(x) - f(x) \right|$.

4. Déduire des résultats précédents que :

$$\forall x \in [0,1], \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}. \tag{3}$$

Partie 2

Etude des fonctions f_n associées à $f : x \mapsto e^x$

Dans tout cette partie, f_n désigne la fonction polynôme associée pour $n \geqslant 1$ à : $f : x \mapsto e^x$.

1. Vérifier que $\forall x \in [0,1], \quad f_n(x) = \Big[x\big(e^{1/n} - 1\big) + 1\Big]^n$.

2. Déterminer pour tout $x \in [0,1]$, $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x)$.

3. On suppose que $x \in]0,1[$.

   a) Ecrire le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $u \mapsto \ell n\Big[x\big(e^u - 1\big) + 1\Big]$.

   b) En déduire un équivalent quand $n \longrightarrow +\infty$ de $f_n(x) - \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x)$.

4. Etudier les variations de la fonction ψ définie sur $[0,1]$ par :

$$\psi(x) = n\, \ell n\Big[x\big(e^{1/n} - 1\big) + 1\Big] - x.$$

(On montrera à l'aide du théorème de Rolle que ψ' possède au moins une racine sur $]0,1[$, puis, en calculant ψ', que cette racine x_n est unique.)

5. En déduire que $\forall x \in [0,1], \quad e^x \leqslant f_n(x) \leqslant e^{x+\psi(x_n)}$

et que $\sup\limits_{x\in[0,1]} \Big|f_n(x) - e^x\Big| \leqslant e\big(e^{\psi(x_n)} - 1\big)$.

6. Donner, en utilisant un développement limité à un ordre suffisant de $\psi(x_n)$, un équivalent de $e^{\psi(x_n)} - 1$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

La fin du problème est $\boxed{\text{5/2}}$

Partie 3

Convergence de la suite (f_n) vers f sur $[0,1]$

Dans toute cette partie, on désigne par f une fonction numérique continue sur $[0,1]$ et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, par f_n la fonction polynôme qui lui est associée.

1. Convergence de $\left(\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx\right)_{n\geqslant 1}$

a) On note, pour $0 \leqslant k \leqslant n$: $I_n(k) = \displaystyle\int_0^1 x^k (1-x)^{n-k}\,dx$.

Déterminer, pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$, une relation de récurrence entre $I_n(k)$ et $I_n(k+1)$.
En déduire $I_n(k)$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$.

b) Calculer, en fonction de f, $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$.
Déterminer $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$.

2) Etude de $\displaystyle\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)|$ pour f de classe C^1 sur $[0,1]$.

On suppose f de classe C^1 sur $[0,1]$.
a) Montrer qu'il existe un réel $k > 0$ tel que $\forall x, x' \in [0,1]$, on ait

$$|f(x') - f(x)| \leqslant k|x' - x|.$$

On pose $M_0 = \displaystyle\sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Établir :

$$\forall \alpha > 0,\ \forall x, x' \in [0,1],\ |f(x') - f(x)| \leqslant k\alpha + 2\frac{M_0}{\alpha^2}(x' - x)^2. \qquad (4)$$

(On distinguera les 2 cas : $|x' - x| \leqslant \alpha$ et $|x' - x| > \alpha$.)
b) En utilisant la relation (3), montrer que :

$$\forall \alpha > 0,\ \forall x \in [0,1],\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant k\alpha + \frac{M_0}{2n\alpha^2}.$$

c) En déduire l'existence d'un réel positif A tel que :

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{A}{\sqrt[3]{n}}.$$

(On étudiera sur $\mathbb{R}^{+*}$, la fonction $\alpha \mapsto k\alpha + \dfrac{M_0}{2n\alpha^2}$.)

Retrouver ainsi $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$.

3) Vitesse de convergence de f_n vers f lorsque f est de classe C^2 :
Soit f une fonction numérique de classe C^2 sur $[0,1]$.
a) On pose $M_2 = \displaystyle\sup_{x\in[0,1]} |f''(x)|$. Démontrer que :

$$\forall x, x' \in [0,1],\ \big|f(x') - f(x) - (x' - x)f(x)\big| \leqslant \frac{M_2}{2}(x' - x)^2.$$

b) En déduire que $\displaystyle\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{M_2}{8n}$.