CORRECTION DM 1

Partie I.

La calculatrice étant autorisée, nous ne nous priverons pas de l'utiliser ici. Il n'y a pas de doute quant aux résultats renvoyés par Maple (utilisé ici) puisqu'il n'ya aucun paramètre à gérer.

1.

```
> M:=matrix(5,5,[0,1,0,1,0,1,0,1,0,0,0,1,0,0,1,1,0,0,0,1,0,0,1,1,0]):
> evalm(M^2);
```

$$matrix\left([[2,0,1,0,1],[0,2,0,1,1],[1,0,2,1,0],[0,1,1,2,0],[1,1,0,0,2]]\right)$$

2.

```
> evalm(M^2+M);
```

$$matrix\left([[2,1,1,1,1],[1,2,1,1,1],[1,1,2,1,1],[1,1,1,2,1],[1,1,1,1,2]]\right)$$

On a donc

$$M^2+M=I_5+J_5$$

3.

```
> J:=matrix(5,5,(i,j)->1):
> evalm(J^2);
```

$$matrix\left([[5,5,5,5,5],[5,5,5,5,5],[5,5,5,5,5],[5,5,5,5,5],[5,5,5,5,5]]\right)$$

On a donc

$$J_5^2=5J_5$$

4. On en déduit que $(M^2+M-I_5)^2=5(M^2+M-I_5)$ c'est à dire que

$$P(M)=0 \quad \text{avec} \quad P=(X^2+X-1)(X^2+X-6)$$

5. Toute valeur propre de M est racine de P et donc

$$sp(M)\subset\left\{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2},-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2},2,-3\right\}$$

6.

```
> kernel(M-diag(2,2,2,2,2));
```

$$\{vector\left([1,1,1,1,1]\right)\}$$

```
> kernel(M+diag(3,3,3,3,3));
```

$$\{\}$$

On a donc

$$sp(M)\cap\mathbb{Z}=\{2\} \quad \text{et} \quad \ker(M-2I_5)=Vect((1,1,1,1,1))$$

Partie II.

1.1. On a, M étant symétrique,

$$a_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} m_{i,k}m_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} m_{i,k}m_{j,k}$$

1.2. On suppose $i \neq j$.

- Si $m_{i,j} = 1$ alors tous les termes de la somme sont nuls et $a_{i,j} = 0$.
- Si $m_{i,j} = 0$ il y a un unique terme dans la somme qui vaut 1 et les autres sont nuls. On a donc $a_{i,j} = 1$.

On peut donc écrire que

$$\forall i \neq j,\ a_{i,j} = 1 - m_{i,j}$$

1.3. On a aussi $a_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} m_{i,k}^2 = \delta$. On en déduit que

$$M^2 + M = J_n + (\delta - 1)I_n$$

2.1. $Im(\phi)$ est l'espace vectoriel engendré par les colonnes de J_n et donc

$$Im(\phi) = Vect(v)$$

2.2. D'après la question 1,

$$(f \circ f)(u) = \phi(u) + (\delta - 1)u - f(u)$$

Comme $f(u) = \delta u$ et $\phi(u) = nv$, on a donc $(f \circ f)(u) = nv - u$. Par ailleurs, $(f \circ f)(u) = \delta^2 u$ et ainsi

$$u = \frac{n}{\delta^2 + 1}v$$

2.3. On vient de voir que $\ker(f - \delta id) \subset Vect(v)$. Réciproquement les coordonnées de $f(v)$ sont les sommes par ligne des coefficients de M et donc $f(v) = \delta v$. Ainsi

$$\ker(f - \delta id) = Vect(v)$$

ce qui montre (comme $v \neq 1$) que δ est valeur propre de f (et donne le sous-espace propre correspondant).

2.4. En appliquant la relation de 2.2 avec $u = v$, on obtient $(\delta^2 + \delta)v = nv + (\delta - 1)v$. Comme $v \neq 0$, on a donc

$$\delta^2 + 1 = n$$

3.1. M est la matrice de f dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. Comme M est symétrique, f est donc autoadjoint. Il existe donc une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres pour f (théorème spectral).

3.2. Les sous-espaces propres sont en somme directe orthogonale. $\ker(f - \lambda id)$ est donc orthogonal à $Ker(f - \delta id)$ $(\delta \neq \lambda)$ et u est donc orthogonal à v ce qui s'écrit (la base canonique étant orthonormée)

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

3.3. De la question précédente, on déduit que $\phi(u)=0$ et avec le début la questioon 2.2 on a donc $(\lambda^2+\lambda)u=(\delta-1)u$. Comme u est non nul (c'est un vecteur propre) on a donc

$$\lambda^2+\lambda+1-\delta=0$$

3.4. f étant diagonalisable, la trace de M est la somme des valeurs propres comptées avec leur multiplicité. Si a est l'unique valeur propre différente de δ (qui, elle, est simple), elle est de multiplicité $n-1$ et donc

$$(n-1)a+\delta=Tr(M)=0$$

On a donc $a=-\frac{\delta}{n-1}\in[-1,0]$. Si on note $P(x)=x^2+x+1-\delta$, on a $P(0)=P(-1)=1-\delta<0$. 0 et -1 sont donc entre les racines de P que sont a et b. On a donc $a,b\notin[-1,0]$ et on obtient une contradiction.

4.1. On sait que $a+b=-1$ et $ab=1-\delta$. On en déduit que

$$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=1-4(1-\delta)=4\delta-3$$

4.2. On a $ar+sb+\delta=Tr(f)=0$ (voir plus haut) et donc $ar+sb=-\delta$. Par ailleurs $r+s+1=n$ (somme des multiplicité qui vaut n) et donc $r+s=n-1$. Ainsi,

$$\begin{pmatrix} r & s \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\delta & n-1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

4.3. En prenant le déterminant, on en déduit que

$$(r-s)(a-b)=n-1-2\delta$$

4.4. Comme $a\neq b$ (question $II.3$), $r=s$ si et seulement si $(r-s)(a-b)=0$. Avec la question précédente, cette condition s'écrit $n-1-2\delta=0$ ou encore $\delta=\frac{n-1}{2}$. Comme $r+s+1=n$, on a alors $r=s=\frac{n-1}{2}$.

5.1. Si $a-b\notin\mathbb{Q}$ alors si $n-1-2\delta\neq 0$, $r-s=\frac{n-1-2\delta}{a-b}\notin\mathbb{Q}$ (par l'absurde par exemple). Ainsi $\delta=\frac{n-1}{2}$ et $r=s=\frac{n-1}{2}$. Comme $n=\delta^2+1$, on en déduit que $n^2-6n+5=0$ et donc $n=2$ ou $n=5$ ou $n=1$. Comme $n\geq 3$, on a donc

$$n=5$$

5.2. Dans ce cas a et b sont racines de $x^2+x-1=0$ et donc

$$a=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\ \text{ et }\ b=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

a et b sont de multiplicité 2 et $\delta=2$ est de multiplicité 1. M est semblable à

$$diag\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\frac{-1-\sqrt{5}}{2},\frac{-1-\sqrt{5}}{2},2\right)$$

6.1. $(a-b)^2$ est un entier et donc m^2/q^2 est entier. Si p est un nombre premier qui divise q alors il divise q^2. $\frac{m^2}{p}=\frac{m^2}{q^2}\frac{q^2}{p}$ est donc entier. p divise donc m^2 et comme p est premier, il divise m. Comme on peut supposer m et q sans facteur premier commun (quitte à simplifier), on obtient une contradiction si q possède des facteurs premiers. Ainsi, $q=1$ et $a-b\in\mathbb{N}$.

6.2. $(a-b)^2 = 4\delta - 3 \geq 1$ est impair et $a-b$ est donc aussi impair plus grand que 1. Si $a-b=1$ alors comme $a+b=-1$ on a $a=0$ et $b=-1$ ce qui est exclus (a et b sont racines de $x^2+x+1-\delta$ et on aurait $\delta = 1$ ce qui est exclus). En notant $a-b = 2p-1$, on a $(2p+1)^2 = 4\delta - 3$ et donc

$$\delta = \frac{(2p+1)^2+3}{4}$$

Par ailleurs, $a+b=-1$ et donc

$$a = p \quad \text{et} \quad b = -p-1$$

6.3. De $(r-s)(a-b) = n-1-2\delta$, on déduit que c divise

$$n-1-2\delta = \delta^2 - 2\delta = (p^2+p+1)(p^2+p-1) = \frac{1}{16}(c^2+3)(c^2-5)$$

A fortiori, c divise $(c^2+3)(c^2-5) = c^4-2c^2-15$. Comme c divise c^4-2c^2, il divise donc aussi 15. Les entiers impairs ≥ 3 qui divisent 15 sont $3, 5$ et 15.

6.4. On connaît tout en fonction de p (en particulier $\delta = p^2+p+1$, $n = \delta^2+1$, $r+s = n-1$ et $r-s = (n-1-2\delta)/c$). On obtient le tableau suivant

c	δ	n	a	b	r	s
3	3	10	1	-2	5	4
5	7	50	2	-3	28	21
15	57	3250	7	-8	1729	1520

Partie III.

1. Pour raison de symétrie, on peut supposer $\alpha < \beta$. Si $a < b$ et $e_\alpha + e_\beta = e_a + e_b$ alors (par exemple par l'aburde) $\alpha = a$ et $\beta = b$ car la famille des (e_k) est libre. On a donc $\binom{5}{2} = 10$ choix qui donneront des vecteurs distincts deux à deux.

2. ψ transforme une base orthonormée en base orthonormée. C'est donc un automorphisme orthogonal et il conserve le produit scalaire. En particulier, on a

$$\forall i,j \in [|1,10|],\ (u_i|u_j) = (\psi(u_i)|\psi(u_j))$$

3.1. Il existe $a < b$ tels que $u_i = e_a + e_b$ et alors

$$(u_i|u_i) = (e_a|e_a) + 2(e_a|e_b) + (e_b|e_b) = 2$$

3.2. On utilise les notations de l'énoncé.

$$(u_i|u_j) = (e_\alpha|e_\alpha) + (e_\alpha|e_\gamma) + (e_\beta|e_\alpha) + (e_\beta|e_\gamma) = 1$$

3.3. On a cette fois $(u_i|u_j) = 0$ (quatre produits scalaires nuls).

4. La matrice

$$M = J_n - A + I_n$$

a des coefficients diagonaux nuls, elle est symétrique, elle ne comporte que des zéros et des 1. Plus précisément, fixons i. u_i s'écrit $e_a + e_b$. Si $u_j = e_\alpha + e_\beta$ alors $M_{i,j} = 1$ ssi les quatre indices a, b, α, β sont distincts. Il y a donc $\binom{3}{2} = 3$ tels coefficients. On est dans le cas $\delta = 3$ (ce qui correspond bien à $n = \delta^2 + 1 = 10$).
Il reste à vérifier la propriété (4). Soit $i \neq j$ alors $M_{i,j} = 0$ si et seulement si il existe α, β, γ avec $\beta \neq \gamma$ tels que $u_i = e_\alpha + e_\beta$ et $u_j = e_\alpha + e_\gamma$.
Si ceci a lieu alors $M_{i,k} = M_{j,k} = 1$ où $u_k = e_c + e_d$ tels que $\{\alpha, \beta, \gamma, c, d\} = [|1,5|]$.
Réciproquement, si un tel k existe alors $u_k = e_c + e_d$ et u_j et u_i n'utilisent pas e_c ni e_d. Ils ont donc un e_α commun dans leur définition (et seulement un car $i \neq j$) et $M_{i,j} = 0$.
M vérifie donc (P).