

DM 1

Notations.

Etant donné un entier naturel non nul n , on note $\llbracket 1, n \rrbracket$ l'ensemble des entiers naturels k tels que $1 \leq k \leq n$.

Pour n entier naturel non nul, on note $M_n(\mathbb{R})$ (respectivement $M_{n,1}(\mathbb{R})$) l'espace vectoriel des matrices carrées à n lignes (respectivement l'espace vectoriel des matrices colonnes à n lignes) à coefficients dans \mathbb{R} .

Etant donnée une matrice A , la notation $A = (a_{i,j})$ signifie que le coefficient $a_{i,j}$ est le coefficient de la ligne i et de la colonne j de la matrice A .

On note I_n la matrice unité de $M_n(\mathbb{R})$ c'est à dire telle que $I_n = (a_{i,j})$ avec $a_{i,j} = 0$ si $i \neq j$ et $a_{i,i} = 1$.

On note J_n la matrice carrée de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1 et K_n la matrice colonne de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

L'espace vectoriel \mathbb{R}^n est rapporté à la base canonique (e_1, e_2, \dots, e_n) .

Objectifs.

Le problème porte sur l'étude de matrices vérifiant une propriété (P) .

Dans la partie I, on fait établir des résultats sur une matrice particulière vérifiant la propriété (P) .

La partie II conduit, à travers l'étude des matrices vérifiant la propriété (P) , à caractériser ces matrices à l'aide de matrices semblables.

Dans la partie III, on construit, à l'aide de produits scalaires, une matrice vérifiant la propriété (P) .

Les trois parties sont indépendantes les unes des autres.

Partie I.

$$\text{Soit } M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{R}).$$

- I.1. Calculer la matrice M^2 .
- I.2. Exprimer la matrice $M^2 + M$ en fonction des matrices J_5 et I_5 .
- I.3. Exprimer la matrice J_5^2 en fonction de la matrice J_5 .
- I.4. Dédurre des questions précédentes un polynôme annulateur de M .
- I.5. Quelles sont les valeurs propres possibles de la matrice M ?
- I.6. Montrer que M possède une valeur propre entière (et une seule) ; déterminer cette valeur propre entière ainsi que le sous-espace propres associé.

Partie II.

Dans cette partie n et δ sont des nombres entiers tels que $2 \leq \delta \leq n - 1$.

On dit qu'une matrice $M = (m_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ vérifie la propriété (P) lorsqu'elle vérifie les quatre conditions suivantes :

- (1) M est symétrique.
- (2) Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $m_{i,i} = 0$.
- (3) Chaque ligne de M comporte δ coefficients égaux à 1 et $n - \delta$ coefficients égaux à 0.

- (4) Pour tout $(i, j) \in [1, n]^2$ avec $i \neq j$, le coefficient $m_{i,j}$ est nul si et seulement si il existe un entier $k \in [1, n]$ tel que $m_{i,k} = m_{j,k} = 1$. L'entier k est alors unique.

On pourra utiliser sans justification une conséquence de la propriété (P) : si $m_{i,j} = 1$ alors pour tout entier $k \in [1, n]$ on a $m_{i,k}m_{j,k} = 0$.

Soit $M = (m_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose que la matrice M vérifie la propriété (P).

II.1. Expression de M^2 . On note $M^2 = (a_{i,j})$.

II.1.1. Pour $i \in [1, n]$, calculer les coefficients $a_{i,j}$.

II.1.2. Pour $(i, j) \in [1, n]^2$ avec $i \neq j$, déterminer le coefficient $a_{i,j}$ selon la valeur de $m_{i,j}$.

II.1.3. Montrer que $M^2 = J_n - M + dI_n$ où d est un nombre entier que l'on déterminera.

Dans la suite, on note f (respectivement ϕ) l'endomorphisme de \mathbb{R}^n , de matrice M (respectivement de matrice J_n), relativement à la base canonique (e_1, e_2, \dots, e_n) de \mathbb{R}^n . On note id l'endomorphisme identité de \mathbb{R}^n .

Soit v le vecteur de \mathbb{R}^n dont la matrice colonne des coordonnées relativement à la base canonique de \mathbb{R}^n est K_n .

II.2. Relation entre n et δ .

II.2.1. Déterminer $Im(\phi)$, l'image de l'application linéaire ϕ .

II.2.2. Soit u un vecteur du noyau de $f - \delta id$. En calculant $(f \circ f)(u)$, montrer que u est colinéaire à v .

II.2.3. Montrer que δ est une valeur propre de f et déterminer le sous-espace propre correspondant.

II.2.4. Dédire des questions précédentes l'égalité $n = \delta^2 + 1$.

II.3. Valeurs propres de f .

Dans la suite de cette question II.3, λ est une valeur propre de f avec $\lambda \neq \delta$ et $u = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ .

II.3.1. Justifier l'affirmation : il existe une base de \mathbb{R}^n formée de vecteurs propres de f .

II.3.2. Justifier l'égalité $\sum_{i=1}^n x_i = 0$. Que vaut $\phi(u)$?

II.3.3. Montrer que λ est racine de l'équation (E) : $x^2 + x + 1 - \delta = 0$.

II.3.4. On note a et b les deux racines de l'équation (E). On suppose qu'une seule de ces racines est valeur propre de f , par exemple a . En utilisant la trace de l'endomorphisme f , exprimer a en fonction de δ . En déduire une impossibilité.

Les deux racines a et b de l'équation (E) sont donc des valeurs propres de f . Dans la suite, on suppose $a > b$.

II.4. Relations portant sur r, s, a, b et δ .

On note r la dimension du noyau de $f - a id$ et s la dimension du noyau de $f - b id$.

II.4.1. Exprimer $(a - b)^2$ en fonction de δ .

II.4.2. Exprimer le produit matriciel $\begin{pmatrix} r & s \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ en fonction de δ .

II.4.3. En déduire $(r - s)(a - b)$ en fonction de δ .

II.4.4. Pour quelle valeur de δ a-t-on $r = s$? Que valent alors r et s ?

Dans la suite, on caractérise la matrice M par une matrice diagonale semblable à M .

II.5. Premier cas. On suppose $a - b \notin \mathbb{Q}$.

II.5.1. Montrer que $r = s$. En déduire δ et n .

II.5.2. Déterminer a et b et donner une matrice diagonale semblable à M .

II.6. Deuxième cas. On suppose que $a - b \in \mathbb{Q}$.

II.6.1. On écrit $a - b = \frac{m}{q}$ avec $m, q \in \mathbb{N}^*$. Montrer que tout nombre premier qui divise q divise m . En déduire que $a - b \in \mathbb{N}$.

II.6.2. Montrer que $a - b$ est un entier impair supérieur ou égal à 3. En notant $a - b = 2p + 1$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, exprimer δ en fonction de p . En déduire a et b en fonction de p .

II.6.3. On note $c = a - b$. Montrer que c divise $(c^2 + 3)(c^2 - 5)$. En déduire que $c \in \{3, 5, 15\}$.

II.6.4. Pour les différentes valeurs de c , donner le tableau des valeurs de δ, n, a, b, r et s .

Partie III.

On considère l'espace vectoriel euclidien \mathbb{R}^5 rapporté à la base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$.

On note $(u|w)$ le produit scalaire de deux vecteurs u et w de \mathbb{R}^5 .

On considère tous les vecteurs u_i obtenus en ajoutant deux vecteurs distincts de \mathcal{B} : $u_i = e_\alpha + e_\beta$ avec $\alpha \neq \beta$.

III.1. Justifier que l'on définit ainsi 10 vecteurs u_i . On les indexe de façon arbitraire $u_i, i \in [1, 10]$.

III.2. Soit ψ un endomorphisme de \mathbb{R}^5 qui réalise une bijection de la base \mathcal{B} sur elle-même. Montrer que

$$\forall i, j \in [1, 10], (u_i|u_j) = (\psi(u_i)|\psi(u_j))$$

III.3. Calcul des produits scalaires $(u_i|u_j)$.

III.3.1. Pour $i \in [1, 10]$, calculer $(u_i|u_i)$.

III.3.2. On suppose $u_i = e_\alpha + e_\beta$ et $u_j = e_\alpha + e_\gamma$ avec $\beta \neq \gamma$. Calculer $(u_i|u_j)$.

III.3.3. On suppose que $u_i = e_\alpha + e_\beta$ et que $u_j = e_\gamma + e_\epsilon$ avec les quatre indices $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon$ tous différents. Calculer $(u_i|u_j)$.

III.4. Soit $A = (a_{i,j})$ avec $a_{i,j} = (u_i|u_j)$.

III.4.1. Ecrire une combinaison linéaire M de A, I_n et J_n susceptible de vérifier la propriété (P) définie dans la partie II.

III.4.2. Justifier que cette matrice M vérifie la propriété (P) .