Développements limités

Au voisinage de 0 : $\sin x \sim x$ $\tan x \sim x$ $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$

$\ln(1+x) \sim x$ $e^x - 1 \sim x$ $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)

$\text{Arctan}x \sim x$ $\text{Arcsin}x \sim x$ $\text{sh}x \sim x$ $\text{th}x \sim x$

Au voisinage de 1 : $\ln x \underset{1}{\sim} x-1$

Théorème de Taylor-Young :

Soient $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $a \in \overset{o}{I}$ et $f \in \mathbb{R}^I$ / $f \in C^n(I)$. Alors f admet un $DL_n(a)$:

$$f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \cdots + (x-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + o\left((x-a)^n\right).$$

$DL_n(0)$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \ldots + \frac{(-1)^p x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \ldots + \frac{(-1)^p x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2} x - \frac{1}{8} x^2 + \ldots + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\ldots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6} x^3 + \frac{3}{40} x^5 + \ldots + \frac{1 \times 3 \times \ldots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \ldots \times (2n) \times (2n+1)} x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$$