Annexe 7 : TD n°3

Exercice 1

Pour estimer la proportion p de pièces défectueuses à la sortie d'une chaîne de production, on prélève un échantillon de n_1 pièces. A la i$^{\text{ème}}$ pièce tirée, on associe la v.a.

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la pièce est défectueuse,} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) En supposant que l'estimateur T_{n_1} de la proportion p est égal à $\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_i$, calculer son espérance et sa variance.

2) On tire un deuxième échantillon de n_2 pièces, indépendamment du premier. On note F_1 et F_2 les fréquences respectives des pièces défectueuses des échantillons 1 et 2.

a) $F = \frac{F_1 + F_2}{2}$ est-il un estimateur sans biais de p ? Quelle est sa variance ?

b) Posons $F' = aF_1 + bF_2$. Donner une condition sur a et b pour que F' soit sans biais de p et avec une variance minimale.

Exercice 2

On considère T la variable aléatoire : "durée d'attente à un feu rouge". La durée du feu rouge est égale à θ, paramètre inconnu strictement positif.

On observe un échantillon $t_1, t_2, \ldots, t_n$ de taille n, où t_i désigne la durée d'attente observée pour le i$^{\text{ème}}$ individu. On fait l'hypothèse que les variables aléatoires $T_1, T_2, \ldots, T_n$ sont indépendantes et de même loi uniforme sur $[0; \theta]$, notée $U[0; \theta]$.

1) Représenter le graphe de la densité de la loi $U[0; \theta]$ et préciser ses paramètres de moyenne et de variance.

2) Soit la statistique $\overline{T} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i$. Calculer $\mathrm{IE}\left(\overline{T}\right)$ et $\mathrm{Var}\left(\overline{T}\right)$.

Montrer que la statistique $\widehat{\theta_1} = 2\overline{T}$ est un estimateur sans biais et convergent de θ.

3) Soit la statistique $Y_n = \sup_i T_i$.

a) En utilisant l'équivalence des événements $\left(Y_n < y\right)$ et $\left(\forall i = 1,\ldots,n \quad T_i < y\right)$, calculer la fonction de répartition de Y_n. En déduire sa densité puis calculer $\mathrm{IE}(Y_n)$ et $\mathrm{Var}(Y_n)$.

b) Montrer que la statistique $\widehat{\theta_2} = \frac{n+1}{n} Y_n$ est un estimateur sans biais et convergent de θ.

4) Comparer les variances $\mathrm{Var}\left(\widehat{\theta_1}\right)$ et $\mathrm{Var}\left(\widehat{\theta_2}\right)$. Lequel des deux estimateurs $\widehat{\theta_1}$ et $\widehat{\theta_2}$ choisiriez-vous pour estimer θ ?

<u>*Application*</u> : pour $n = 10$, on a $(t_1, \ldots, t_{10}) = (28; 33 ;42 ;15 ;20 ;27 ;18 ;40 ;16 ;25)$.
Quelle est l'estimation de la durée du feu rouge ?