Annexe 8 : TD n°5

Exercice 1

Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie par :

$$f_n(x) = n^2 x e^{\frac{-n^2x^2}{2}} 1_{\mathbb{R}_+}(x) .$$

1) Montrer que f_n est la densité d'une variable aléatoire.

2) Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires telle que, pour tout entier $n \geq 1$, X_n admet pour densité f_n. Démontrer que la suite $(X_n)_n$ converge en probabilité vers une variable aléatoire X que l'on précisera.

Exercice 2

Un fournisseur d'accès à Internet met en place un point local d'accès, qui dessert 5000 abonnés. A un instant donné, chaque abonné a une probabilité égale à 20% d'être connecté. Les comportements des abonnés sont supposés indépendants les uns des autres.

1) On note X la variable aléatoire égale au nombre d'abonnés connectés à un instant t. Quelle est la loi de X ? Quelle est son espérance, son écart-type ?

2) Le fournisseur d'accès souhaite savoir combien de connexions simultanées le point d'accès doit pouvoir gérer pour que sa probabilité d'être saturé à un instant donné soit inférieure à 2,5%. Proposer une valeur approchée de ce nombre de connexions.

Exercice 3

Il arrive assez souvent que le nombre de réservations pour une liaison aérienne soit supérieur au nombre de passagers se présentant effectivement le jour du vol.

Cela est dû à des empêchements imprévisibles de certains passagers et à une politique systématique de certains d'entre eux qui réservent des places sur plusieurs vols de façon à choisir au dernier moment celui qui leur convient le mieux (en raison de la concurrence, et selon les tarifs choisis, les compagnies ne pénalisent pas les clients qui se désistent et ne font payer effectivement que ceux qui embarquent).

Pour compenser ce phénomène, une compagnie aérienne exploitant un avion de 300 places décide de faire de la surréservation (*surbooking*) en prenant pour chaque vol un nombre n>300 de réservations. S'il se présente plus de 300 passagers à l'embarquement, les 300 premiers arrivés prennent leur vol et les autres sont dédommagés financièrement.

1) On considère que les passagers sont mutuellement indépendants et que la probabilité de désistement de chacun d'eux est 10\%. On note n le nombre de réservations prises par la

compagnie pour un vol donné et S_n le nombre (aléatoire) de passagers se présentant à l'embarquement pour ce vol. Donner la loi de S_n, son espérance $\mathrm{IE}(S_n)$ et sa variance $\mathrm{Var}(S_n)$.

2) Le directeur commercial de la compagnie aimerait connaitre la valeur maximale de n telle que $P(S_n \leq 300) \geq 0{,}99$. Proposer une solution approchée de ce problème.

Exercice 4

Un paquebot tout neuf (Le Titanic !) quitte l'Europe à Queenstown (Irlande) le 11 avril 1912 à midi pour son voyage inaugural. Il doit traverser l'Atlantique sur 5 500 km et arriver à New York, si tout se passe bien, le matin du 17 avril où une grande fête est déjà prévue ! Il était parti de Southampton la veille et avait fait escale à Cherbourg en fin de journée.

1°) Le Titanic pouvait accueillir 3 000 passagers et on avait enregistré R réservations (indépendantes) pour le voyage inaugural.
Habituellement la probabilité d'annulation est de 0,2.
On note X le nombre de passagers présents à l'embarquement le jour du départ.
Déterminer la loi de X ainsi que son espérance et sa variance

2°) Dans le cas R = 3 000, calculer les probabilités des événements suivants :

- i) $(2\,370 \leq X \leq 2\,430)$
- ii) $(X > 2\,360)$,
- iii) $X < 2\,000$.
- iv) Est-il normal qu'il y ait eu seulement 1 300 passagers ?

3°) Toujours dans le cas R = 3 000, déterminer le nombre a tel que :

$$\mathrm{IP}(2\,400 - a < X < 2\,400 + a) = 0{,}95.$$

4°) Combien de réservations pourrait-on enregistrer pour que la probabilité d'être en surcapacité (plus de 3000 personnes au départ) soit inférieure à 0,05 ?