Annexe 7 : TD n°4

Exercice 1

On considère un couple (X, Y) de VAR discrètes dont la loi est donnée par :

X \ Y	0	1	4
-2	0	0	1/6
-1	0	1/4	0
0	1/6	0	0
1	0	1/4	0
2	0	0	1/6

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
2. Les VAR X et Y sont-elle indépendantes ?
3. Calculer cov(X, Y) et faire une remarque sur ce résultat.

Exercice 2

Soit (X, Y) un couple de VAR de densité :

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}(1+xy) & \text{si } -1\le x\le 1 \text{ et } -1\le y\le 1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

et soit (U, V) un autre couple de V.A.R. de densité :

$$f_{U,V}(u,v)=\begin{cases}\dfrac{1}{4} & \text{si } -1\le u\le 1 \text{ et } -1\le v\le 1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

1) Calculer les lois marginales de X et de Y.
2) Calculer les lois marginales de U et de V.
3) Etudier l'indépendance des couples (X, Y) et (U, V).

Exercice 3

Trois personnes entrent l'une après l'autre dans les locaux d'une administration française. Nous voulons connaître la loi du temps d'attente de la troisième personne. Nous allons étudier deux situations :

1. Il n'y a qu'un seul guichet. La troisième personne doit attendre que les deux personnes aient terminé pour pouvoir être reçue.
2. Il y a deux guichets. La troisième personne doit attendre qu'un des deux guichets se libère pour pouvoir être reçue.

1) En posant X_1 (resp. X_2) la variable aléatoire réelle du temps de passage au guichet de la première personne (resp. de la deuxième), déterminer X_3, la variable aléatoire réelle du temps d'attente de la troisième personne, en fonction de X_1 et X_2 dans les deux situations.

2) On suppose que les variables aléatoires X_1 et X_2 peuvent être modélisées par des lois exponentielles de paramètres distincts λ_1 et λ_2, et que ces VAR sont indépendantes.

a) Après avoir fait le changement de variables $(X_1, X_2) \mapsto (X_1, X_1 + X_2)$, donner la loi de X_3 dans la première situation. Calculer le temps moyen d'attente de la troisième personne dans la première situation.

b) Calculer la loi de T = $\inf(X_1 ; X_2)$. Pour cela, calculer la fonction de répartition de T en utilisant l'équivalence suivante :

$$\inf (X_1, X_2, \ldots, X_n) > t \Leftrightarrow \forall i,\ X_i > t$$

Calculer alors le temps moyen d'attente de la troisième personne dans la seconde situation.

Exercice 4

Soit $\theta > 0$ et $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < y < x\}$. Un couple (X, Y) de variables aléatoires réelles a pour densité :

$$f(x, y) = \begin{cases} \theta^2 \mathrm{e}^{-\theta x} & \text{si } (x, y) \in D \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Calculer les lois marginales de X et de Y.
2) Calculer la loi de $Z = Y / X$ et montrer que les variables aléatoires X et Z sont indépendantes.

Exercice 5

Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur]0, 1[. On définit les variables aléatoires X et Y de la façon suivante :

$$\begin{cases} X = \sqrt{-2\ln U}\,\cos(2\pi V) \\ Y = \sqrt{-2\ln U}\,\sin(2\pi V) \end{cases}$$

Montrer que X et Y sont des variables aléatoires normales centrées réduites indépendantes.

On rappelle que : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$.