Annexe 6 : TD n°3

Exercice 1

Lors d'un procès en attribution de paternité, un expert témoigne que la durée de la grossesse, en jours, c'est-à-dire le laps de temps entre la conception et la naissance de l'enfant, est de distribution approximativement normale avec paramètres $m = 270$ et $\sigma^2 = 100$. L'un des pères putatifs est en mesure de prouver son absence du pays pendant une période s'étendant entre le 290$^{\text{iéme}}$ et le 240$^{\text{ième}}$ jour précédent l'accouchement. Quelle est la probabilité que la conception ait eu lieu à ce moment ?

Exercice 2

On suppose que la durée d'une conversation téléphonique, mesurée en minutes, est une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}1$. J'arrive à une cabine et quelqu'un passe juste avant moi.

Avec quelle probabilité dois-je attendre :

1) plus de 10 minutes ?

2) entre 10 et 20 minutes ?

Exercice 3

On suppose que la durée de vie d'un individu est une variable aléatoire continue dont la densité de probabilité f est donnée par : $\begin{cases} f(t) = kt^2(100-t)^2 & \text{si } 0 \le t \le 100, \\ f(t) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1) Déterminer k pour que f soit effectivement une densité de probabilité.

2) Calculer l'espérance mathématique de la durée de vie d'un individu, puis son écart-type.

3) Calculer la probabilité pour qu'un individu meure entre 30 et 60 ans.

Exercice 4

Soit X une VAR, suivant une loi normale de paramètre m et σ^2.

1) Déterminer la loi de $T = \dfrac{X-m}{\sigma}$.

La V.A.R. X suit maintenant une loi normale de moyenne 20 et de variance 25, notée $N(20;25)$.

2) Calculer les probabilités suivantes :

- **a)** $\mathrm{IP}\left(X \le 28\right)$,
- **b)** $\mathrm{IP}\left(X \ge 12\right)$,
- **c)** $\mathrm{IP}\left(12 \le X \le 28\right)$.

3) Déterminer les valeurs de a telles que :

- **a)** $\mathrm{IP}\left(X \le a\right) = 0{,}99$,
- **b)** $\mathrm{IP}\left(X \le a\right) = 0{,}01$,
- **c)** $\mathrm{IP}\left(X \ge a\right) = 0{,}05$,
- **d)** $\mathrm{IP}\left(20-a \le X \le 20+a\right) = 0{,}95$.

Exercice 5

1) Soit X une VAR, suivant une loi normale de paramètre m et σ^2.

a) Déterminer la loi de $Y = \exp(X)$. Cette loi est appelée Log-normale.

b) Déterminer la loi de $Z = X^2$.

2) Montrer que si U suit la loi uniforme sur]0; 1[alors $Y = \dfrac{-\ln(1-U)}{\lambda}$ suit une loi exponentielle $\varepsilon(\lambda)$

.