**Initiation aux probabilités** **TS 13B**

**Examen du 03/12/2014**

**CORRECTION**

## Exercice 1

On note $P$ l'événement : « avoir réussi en probas », et $S$ l'événement « réussir en stat »

a) $\mathrm{IP}_{\overline{P}}\left(\overline{S}\right)=\dfrac{\mathrm{IP}\left(\overline{P}\cap\overline{S}\right)}{\mathrm{IP}\left(\overline{P}\right)}=\dfrac{0,08}{0,25}=0,32$

b) $\mathrm{IP}_{\overline{S}}\left(\overline{P}\right)=\dfrac{\mathrm{IP}\left(\overline{P}\cap\overline{S}\right)}{\mathrm{IP}\left(\overline{S}\right)}=\dfrac{0,08}{0,13}\simeq 0,62$

c) $\mathrm{IP}\left(\overline{P}\cup\overline{S}\right)=\mathrm{IP}\left(\overline{P}\right)+\mathrm{IP}\left(\overline{S}\right)-\mathrm{IP}\left(\overline{P}\cap\overline{S}\right)=0,25+0,13-0,08=0,3$

## Exercice 2

On note $X$ la variable aléatoire qui donne le nombre d'accidents quotidiens.

a) $\mathrm{IP}\left(X\geq 3\right)=1-\left(\mathrm{IP}\left(X=0\right)+\mathrm{IP}\left(X=1\right)+\mathrm{IP}\left(X=2\right)\right)=1-\mathrm{e}^{-3}\left(1+3+\dfrac{9}{2}\right)\simeq 0,577$

b) $\mathrm{IP}_{\left(X\geq 1\right)}\left(X\geq 3\right)=\dfrac{\mathrm{IP}\left(X\geq 3\cap X\geq 1\right)}{\mathrm{IP}\left(X\geq 1\right)}=\dfrac{\mathrm{IP}\left(X\geq 3\right)}{\mathrm{IP}\left(X\geq 1\right)}=\dfrac{\mathrm{IP}\left(X\geq 3\right)}{1-\mathrm{IP}\left(X=0\right)}\simeq 0,607$

## Exercice 3

1.a) X suit une loi binomiale de paramètres (238 ; 0,02).

b) $\mathrm{IP}\left(X=0\right)=0,98^{238}\simeq 0,008$

c) $\mathrm{IP}\left(X\geq 3\right)=1-\left(\mathrm{IP}\left(X=0\right)+\mathrm{IP}\left(X=1\right)+\mathrm{IP}\left(X=2\right)\right)\simeq 0,856$

2. Soit $T=\dfrac{X-400}{\sqrt{392}}$ ; $T$ suit une loi normale centrée réduite.

a) $\mathrm{IP}\left(X\leq 450\right)=\mathrm{IP}\left(T\leq 2,53\right)\simeq 0,994$

$\mathrm{IP}\left(350\leq X\leq 450\right)=\mathrm{IP}\left(-2,53\leq T\leq 2,53\right)=2\mathrm{IP}\left(T\leq 2,53\right)-1\simeq 0,99$

b) $\mathrm{IP}\left(400-a\leq \mathrm{Y}\leq 400+a\right)=0,95\Leftrightarrow \mathrm{IP}\left(\dfrac{-a}{\sqrt{392}}\leq T\leq\dfrac{a}{\sqrt{392}}\right)=0,95\Leftrightarrow 2\mathrm{IP}\left(T\leq\dfrac{a}{\sqrt{392}}\right)-1=0,95$

$\Leftrightarrow \mathrm{IP}\left(T\leq\dfrac{a}{\sqrt{392}}\right)=0,975\Rightarrow\dfrac{a}{\sqrt{392}}\simeq 1,96\Leftrightarrow a\simeq 39$

T.S.V.P.

**Exercice 4**

1. $P\left(N_{730}=0\right)=e^{-0,02\times 730}\simeq 4,6\times 10^{-7}$ (en négligeant les années bissextiles).

2. $\mathrm{IP}_{(N_{730=0})}\left(N_{1095}=1\right)=\dfrac{\mathrm{IP}\left(\left(N_{730}=0\right)\cap\left(N_{1095}=1\right)\right)}{\mathrm{IP}\left(N_{730}=0\right)}=\dfrac{\mathrm{IP}\left(\left(N_{730}=0\right)\cap\left(N_{1095}-N_{730}=1\right)\right)}{\mathrm{IP}\left(N_{730}=0\right)}$

$=\dfrac{\mathrm{IP}\left(N_{730}=0\right)\times\mathrm{IP}\left(N_{1095}-N_{730}=1\right)}{\mathrm{IP}\left(N_{730}=0\right)}=\mathrm{IP}\left(N_{1095}-N_{730}=1\right)=e^{-0,02\times(1095-730)}\times\left(0,02\times(1095-730)\right)\simeq 0,005$

**Exercice 5**

On note C1 l'événement « le composant $C_1$ tombe en panne », $C_2$ l'événement « le composant $C_2$ tombe en panne », et HS l'événement « le système tombe en passe ».

1. a) $\mathrm{IP(HS)}=\mathrm{IP}\left(C_1\cup C_2\right)=\mathrm{IP}\left(C_1\right)+\mathrm{IP}\left(C_2\right)-\mathrm{IP}\left(C_1\cap C_2\right)=p_1+p_2-p_1p_2$

b) $\mathrm{IP(HS)}=\mathrm{IP}\left(\left(C_{1a}\cup C_{2a}\right)\cap\left(C_{1a}\cup C_{2a}\right)\right)=\left(\mathrm{IP}\left(C_{1a}\cup C_{2a}\right)\right)^2=\left(p_1+p_2-p_1p_2\right)^2$

c) $\mathrm{IP(HS)}=\mathrm{IP}\left(\left(C_{1a}\cap C_{1b}\right)\cup\left(C_{2a}\cap C_{2b}\right)\right)=\mathrm{IP}\left(C_{1a}\cap C_{1b}\right)+\mathrm{IP}\left(C_{2a}\cap C_{2b}\right)-\mathrm{IP}\left(\left(C_{1a}\cap C_{1b}\right)\cap\left(C_{2a}\cap C_{2b}\right)\right)$

$=p_1^{\,2}+p_2^{\,2}-\left(p_1p_2\right)^2$

2. a) $R_1\left(t\right)=\mathrm{e}^{-\int_0^t 0,0025\,x^{-0,5}dx}=\mathrm{e}^{-0,005\sqrt{t}}$ ; $R_2\left(t\right)=\mathrm{e}^{-\int_0^t 0,002dx}=\mathrm{e}^{-0,002\,t}$

b) $R_a\left(t\right)=R_1\left(t\right)R_2\left(t\right);\ R_b\left(t\right)=1-\left(1-R_a\left(t\right)\right)^2$

$R_c\left(t\right)=\left[1-\left(1-R_1\left(t\right)\right)^2\right]\times\left[1-\left(1-R_2\left(t\right)\right)^2\right]=R_1\left(t\right)R_2\left(t\right)\left(2-R_1\left(t\right)\right)\left(2-R_2\left(t\right)\right)$

3. a) $R_3\left(t\right)=\mathrm{e}^{-\int_0^t 0,0025dx}=\mathrm{e}^{-0,0025\,t}$

b) Si $C_3$ fonctionne, on retrouve le système *c*, si $C_3$ ne fonctionne pas, on retrouve le système *b*. D'où :
$R_S\left(t\right)=R_3\left(t\right)R_c\left(t\right)+\left(1-R_3\left(t\right)\right)R_b\left(t\right)$

**Exercice 6**

1. $f_X(x)=\left(\int_x^1 8xydy\right)\mathbf{1}_{[0;1]}\left(x\right)=4x\left(1-x^2\right)\mathbf{1}_{[0;1]}\left(x\right);\ f_Y(y)=\left(\int_0^y 8xydy\right)\mathbf{1}_{[0;1]}\left(y\right)=4y^3\mathbf{1}_{[0;1]}\left(y\right)$

2. $f_{X,Y}(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$, donc les VA X et Y ne sont pas indépendantes.

3. Soit : $g(x,y)=\left(x,y-x\right)=(u,v)$ Alors : $g^{-1}(u,v)=(u,u+v)=(x,y)$

$D=\left\{(x,y)/0\le x\le y\le 1\right\}\Rightarrow\left(0\le y-x\le 1-x\right)\Rightarrow\Delta=g(D)=\left\{(u,v)/0\le u\le 1\ \text{ et }\ 0\le v\le 1-u\right\}$

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=1\Rightarrow f_{X,Z}(u,v)=f_{X,Y}(u,v+u)\mathbf{1}_\Delta(u,v)=8u\left(u+v\right)\mathbf{1}_\Delta(u,v)$$

$$f_Z(v)=\left(\int_0^{1-v}8u\left(u+v\right)du\right)\mathbf{1}_{[0;1]}(v)=\frac{4}{3}\left(v^3-3v+2\right)\mathbf{1}_{[0;1]}(v)$$