Initiation aux probabilités **TS 12A**
Correction Examen du 07/06/2013

Exercice 1

Marc-Antoine possède 4 sacs de billes. Chacun des trois premiers sacs A, B, et C est rempli à moitié de billes rouges et à moitié de billes blanches, tandis que le sac D contient un tiers de billes rouges et deux tiers de billes blanches. Marc-Antoine choisit un sac au hasard et tire avec remise 3 billes de ce sac.

a) Sachant que Marc-Antoine a sélectionné le sac C, calculer la probabilité qu'il obtienne en tout deux billes rouges et une bille blanche.
b) Calculer la probabilité que Marc-Antoine obtienne en tout 3 billes blanches.
c) Finalement, Marc-Antoine tire en tout 2 billes rouges et une bille blanche. Calculer la probabilité que ces billes proviennent du sac D.

(a)

$$P(2 \text{ rouges, } 1 \text{ blanche} \mid \text{sac } C) = 3 \cdot (1/2)^3 = 3/8.$$

(b)

$$P(3 \text{ blanches}) = (1/2)^3 \cdot 3/4 + \cdot(2/3)^3 \cdot 1/4 \approx 0.17$$

(c)

$$\begin{aligned} P(\text{sac } D \mid 2 \text{ rouges, } 1 \text{ blanche}) &= \frac{P(2 \text{ rouges, } 1 \text{ blanche} \mid \text{sac } D) \cdot P(\text{sac } D)}{P(2 \text{ rouges, } 1 \text{ blanche})} \\ &= \frac{3 \cdot (1/3)^2 \cdot 2/3 \cdot 1/4}{3 \cdot (1/3)^2 \cdot 2/3 \cdot 1/4 + 3 \cdot (1/2)^3 \cdot 3/4}. \\ &\approx 0.16 \end{aligned}$$

Exercice 2 Soients $\theta > 2, k > 0$ et f : $\left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\alpha}{x^{\theta+1}} & \text{si } x \geq k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_k^{+\infty} \frac{\alpha}{x^{\theta+1}} dx = \left[\frac{\alpha}{-\theta x^\theta} \right]_k^{+\infty} = \frac{\alpha}{\theta k^\theta} = 1 \Rightarrow \alpha = \theta k^\theta$.

2. $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \leq k \\ \int_k^x \frac{\theta k^\theta}{t^{\theta+1}} dt = \left[\frac{\theta k^\theta}{-\theta t^\theta} \right]_k^x = 1 - \left(\frac{k}{x} \right)^\theta & \text{pour } x \geq k \end{cases}.$

3. $IE(X) = \int_k^{+\infty} t \frac{\theta k^\theta}{t^{\theta+1}} dt = \theta k^\theta \int_k^{+\infty} t^{-\theta} dt = \theta k^\theta \left[\frac{t^{1-\theta}}{1-\theta} \right]_k^{+\infty} = \frac{\theta k}{\theta - 1}$

$$\begin{aligned} Var(X) &= IE(X^2) - (IE(X))^2 = \int_k^{+\infty} t^2 \frac{\theta k^\theta}{t^{\theta+1}} dt - \left(\frac{\theta k}{\theta - 1} \right)^2 = \theta k^\theta \int_k^{+\infty} t^{1-\theta} dt - \left(\frac{\theta k}{\theta - 1} \right)^2 \\ &= \theta k^\theta \left[\frac{t^{2-\theta}}{2-\theta} \right]_k^{+\infty} - \left(\frac{\theta k}{\theta - 1} \right)^2 = \theta k^2 \left(\frac{1}{\theta - 2} - \frac{\theta}{(\theta-1)^2} \right) = \frac{\theta k^2}{(\theta-2)(\theta-1)^2} \end{aligned}.$$

T.S.V.P.

Exercice 3 Si X suit la loi normale de moyenne m = 4,5 et d'écart type σ =2,4 alors T = $\dfrac{X-4,5}{2,4}$ suit une normale N(0, 1). On obtient alors :

1. IP(X>4,5) = 0,5.

2. IP(X>8,5) = IP$\left(T>\dfrac{8,5-4,5}{2,4}\right)$ = IP$\left(T>\dfrac{4}{2,4}\right)$ $\simeq$ IP$(T>1,67)$ $\simeq$ 1 - IP$(T<1,67)$

$\simeq$ 1 – 0,95254 $\simeq$ 0,04746 $\simeq$ 4,746%.

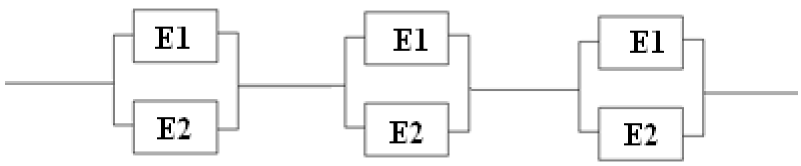
3. IP(X>8,5 / X>4,5) = $\dfrac{IP(X>8,5 \text{ et } X>4,5)}{IP(X>4,5)} = \dfrac{IP(X>8,5)}{IP(X>4,5)} \simeq \dfrac{0,04746}{0,5} \simeq 0,09492$ $\simeq$ 9,492%.

4. IP(X<4) = IP$\left(T<\dfrac{4-4,5}{2,4}\right)$ = IP$\left(T<\dfrac{-0,5}{2,4}\right)$ $\simeq$ IP$(T<-0,208)$ $\simeq$ IP$(T>0,208)$

$\simeq$ 1 - IP$(T<0,21)$ $\simeq$ 1 – 0,58317 $\simeq$ 0,41683 $\simeq$ 41,683%.

Exercice 4 Une partie du STPV (Système de Traitement des Plans de Vol) est composé de 3 systèmes (S_1, S_2 et S_3) dont chacun d'entre eux est composé de 2 éléments E_1 et E_2 en parallèle. Pour que le STPV fonctionne, il faut que S_1, S_2 et S_3 fonctionnent tous les trois en même temps.

1) Dessiner le diagramme de fiabilité correspondant au système complet.



2) Pour cette partie, on suppose que les éléments E_1 et E_2 sont irréparables de taux de défaillance $\lambda_1(t) = 4.10^{-2} t^{-0,4}$ pannes/mois et $\lambda_2(t) = 3.10^{-2}$ pannes/mois.

   a) Après avoir déterminé la fiabilité des 2 éléments E_1 et E_2, déterminer la fiabilité du système de la question 1.

$$R_1(t) = e^{-\int_0^t 4.10^{-2} u^{-0,4} du} = e^{-4.10^{-2}\left[\frac{u^{0,6}}{0,6}\right]_0^t} = e^{-\frac{0,2}{3}t^{0,6}}$$

$$R_2(t) = e^{-3.10^{-2}t}$$

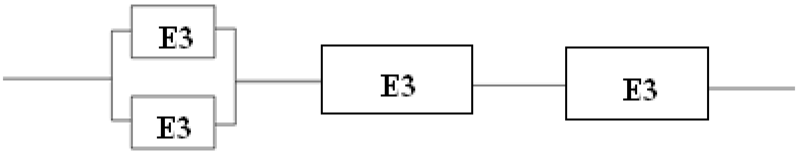
$$R_{S_1}(t) = 1-(1-R_1(t))(1-R_2(t))$$

$$R_S(t) = R_{S_1}(t)R_{S_2}(t)R_{S_3}(t) = \left(1-(1-R_1(t))(1-R_2(t))\right)^3$$

$$\Rightarrow R_S(t) = \left(e^{-\frac{0,2}{3}t^{0,6}} + e^{-3.10^{-2}t} + e^{-3.10^{-2}t-\frac{0,2}{3}t^{0,6}}\right)^3$$

   b) La calculer pour t = 6 mois. $R_S(6) \simeq 0,915$

3) En considérant qu'on peut remplacer les deux éléments E_1 et E_2 en parallèle par un seul élément E_3, on suppose pour cette question que le système S_1 possède en plus de l'élément E_3 un autre élément E_3 en parallèle.



a) Déterminer la nouvelle fiabilité du système S_1. $R_{S_1}(t)=1-\left(1-R_3(t)\right)^2$

b) Calculer alors la fiabilité du système complet pour t = 6 mois.
$R_S(t)=R_{S_1}(t)R_{S_2}(t)R_{S_3}(t)\Rightarrow R_S(6)\simeq 0{,}9416$

Exercice 5

Soient $\lambda>0$ et $(X,\ Y)$ un couple de VAR de densité :

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda(x+y)} & \text{si } 0\le x \text{ et } 0\le y\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

1. $f_X(x)=\left(\int_0^{+\infty}\lambda^2e^{-\lambda(x+y)}dy\right)1_{[0,+\infty[}(x)=\lambda^2e^{-\lambda x}\left[\frac{-\lambda y}{-\lambda}\right]_0^{+\infty}1_{[0,+\infty[}(x)=\lambda e^{-\lambda x}1_{[0,+\infty[}(x)$

De même $f_Y(y)=\lambda e^{-\lambda y}1_{[0,+\infty[}(y)$

2. $f_X(x)f_Y(y)=f_{X,Y}(x\,;y)$, les deux variables aléatoires sont donc indépendantes.

3. Soit : $g(x,y)=\left(\frac{x}{x+y},x+y\right)=(u,v)$ Alors : $g^{-1}(u,v)=(uv,v-uv)=(x,y)$

$D=\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\Rightarrow(x\ge 0 \text{ et } y\ge 0)\Rightarrow\Delta=g(D)=\{(u,v)/0\le u\le 1 \text{ et } v\ge 0\}$

$$f_{U,V}(u,v)=f_{X,Y}\circ g(x,y)\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}1_\Delta(u,v)=f_{X,Y}(uv,v-uv)\begin{vmatrix}v & u\\ -v & 1-u\end{vmatrix}1_\Delta(u,v)$$
$$=\lambda^2e^{-\lambda v}v1_\Delta(u,v)$$

4. Lois marginales de U et de V :

$$f_U(u)=\int_0^{+\infty}\lambda^2ve^{-\lambda v}1_{[0,1]}(u)du=\lambda^2\left(\left[\frac{-v}{\lambda}e^{-\lambda v}\right]_0^{+\infty}+\frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty}e^{-\lambda v}du\right)1_{[0,1]}(u)$$
$$=\lambda^2\left(\left[\frac{-1}{\lambda^2}e^{-\lambda v}\right]_0^{+\infty}\right)1_{[0,1]}(u)=1_{[0,1]}(u)\quad\text{donc } U\sim\text{loi unif. sur }[0,1]$$

$$f_V(v)=\int_0^1\lambda^2ve^{-\lambda v}1_{[0,+\infty[}(v)du=\lambda^2ve^{-\lambda v}1_{[0,+\infty[}(v)$$

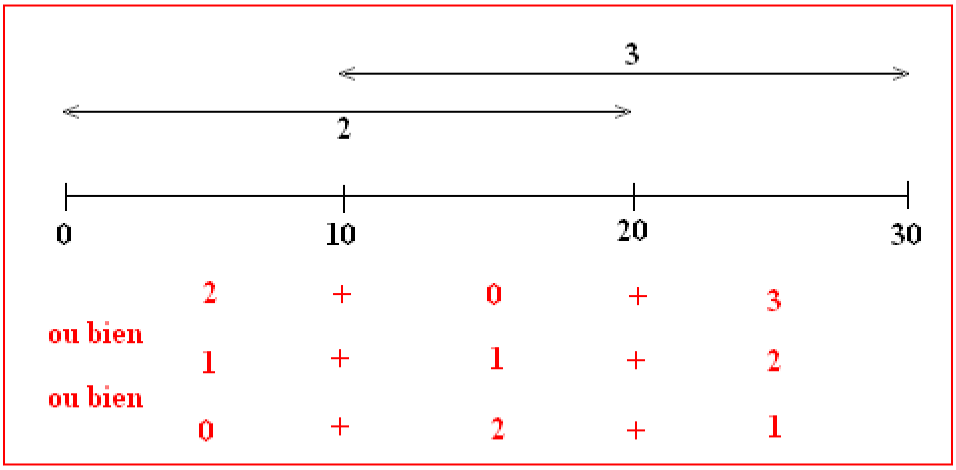
Exercice 6

Nous étudions la fiabilité d'un transpondeur. Nous supposons que les instants de défaillance sont modélisés par un processus de Poisson homogène de paramètre $\lambda = 2.10^{-3}$ pannes/mois.

1) Calculer la probabilité qu'il y ait une défaillance sur une année.

$$IP(X=1) = \frac{\lambda t^1}{1!} e^{-\lambda t} = \lambda t e^{-\lambda t} = 2.10^{-3} \times 12 e^{-2.10^{-3} \times 12} \simeq 0{,}0234$$

2) Sachant qu'il y a eu 2 défaillances en 20 mois, calculer la probabilité qu'il y ait eu 3 défaillances entre 10 mois et 30 mois.



$$IP_{(N_{20}-N_0=2)}(N_{30}-N_{10}=3) = \frac{IP(N_{10}-N_0=2)\, IP(N_{20}-N_{10}=0)\, IP(N_{30}-N_{20}=3) + \ldots}{IP(N_{20}-N_0=2)}$$

$$\Rightarrow IP_{(N_{20}-N_0=2)}(N_{30}-N_{10}=3) \simeq 0{,}005$$