Initiation aux probabilités **TS 12A**
Examen du 07/06/2013

Seuls les documents distribués avec le sujet sont acceptés.
Tout type de calculatrice est autorisé.
Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre que vous souhaitez.

Exercice 1

Marc-Antoine possède 4 sacs de billes. Chacun des trois premiers sacs A, B, et C est rempli à moitié de billes rouges et à moitié de billes blanches, tandis que le sac D contient un tiers de billes rouges et deux tiers de billes blanches. Marc-Antoine choisit un sac au hasard et tire avec remise 3 billes de ce sac.

a) Sachant que Marc-Antoine a sélectionné le sac C, calculer la probabilité qu'il obtienne en tout deux billes rouges et une bille blanche.
b) Calculer la probabilité que Marc-Antoine obtienne en tout 3 billes blanches.
c) Finalement, Marc-Antoine tire en tout 2 billes rouges et une bille blanche. Calculer la probabilité que ces billes proviennent du sac D.

Exercice 2

Soient $\theta > 2, k > 0$ et f : $\left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\alpha}{x^{\theta+1}} & \text{si } x \geq k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$

1. Déterminer α pour que f soit la densité de probabilité d'une variable aléatoire X.
2. Donner la fonction de répartition de X.
3. Calculer IE[X] et Var(X).

Exercice 3

Un contrôle de qualité d'une eau de baignade consiste à mesurer le nombre de coliformes contenus dans 100 ml de cette eau. On désigne par X la variable aléatoire qui, à tout prélèvement au hasard de 100 ml d'eau associe le nombre de coliformes, exprimé en nombre entier de milliers, contenus dans cette eau.
On admet que cette variable aléatoire discrète X suit la loi normale de moyenne m = 4,5 et d'écart type σ =2,4.

1. Déterminer une approximation de la probabilité de l'évènement X>4,5.

2. Déterminer une approximation de la probabilité de l'évènement X>8,5.

3. Déterminer une approximation de la probabilité de l'évènement X>8,5 en sachant X>4,5.

4. Déterminer une approximation de la probabilité de l'évènement X<4.

Exercice 4

Une partie du STPV (Système de Traitement des Plans de Vol) est composé de 3 systèmes (S_1, S_2 et S_3) dont chacun d'entre eux est composé de 2 éléments E_1 et E_2 en parallèle. Pour que le STPV fonctionne, il faut que S_1, S_2 et S_3 fonctionnent tous les trois en même temps.

1) Dessiner le diagramme de fiabilité correspondant au système complet.

2) Pour cette partie, on suppose que les éléments E_1 et E_2 sont irréparables de taux de défaillance $\lambda_1(t) = 4.10^{-2} t^{-0,4}$ pannes/mois et $\lambda_2(t) = 3.10^{-2}$ pannes/mois.
   a) Après avoir déterminé la fiabilité des 2 éléments E_1 et E_2, déterminer la fiabilité du système de la question 1.
   b) La calculer pour $t = 6$ mois.

3) En considérant qu'on peut remplacer les deux éléments E_1 et E_2 en parallèle par un seul élément E_3, on suppose pour cette question que le système S_1 possède en plus de l'élément E_3 un autre élément E_3 en parallèle.
   a) Déterminer la nouvelle fiabilité du système S_1.
   b) Calculer alors la fiabilité du système complet pour $t = 6$ mois.

Exercice 5

Soient $\lambda > 0$ et (X, Y) un couple de VAR de densité :

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda(x+y)} & \text{si } 0 \leq x \quad \text{et} \quad 0 \leq y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer les lois marginales de X et de Y.
2. Etudier l'indépendance du couple (X, Y).
3. Déterminer la fonction de densité de $(U, V) = \left(\dfrac{X}{X+Y}, X+Y \right)$.
4. En déduire les lois marginales de U et de V.

Exercice 6

Nous étudions la fiabilité d'un transpondeur. Nous supposons que les instants de défaillance sont modélisés par un processus de Poisson homogène de paramètre $\lambda = 2.10^{-3}$ pannes/mois.

1) Calculer la probabilité qu'il y ait une défaillance sur une année.
2) Sachant qu'il y a eu 2 défaillances en 20 mois, calculer la probabilité qu'il y ait eu 3 défaillances entre 10 mois et 30 mois.