Correction

Exercice 1

1. D'après l'énoncé $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et pour tout $k \in X(\Omega)$ on a $P(X = k) = p \times k$.
2. On sait que $([X = 1], [X = 2], [X = 3], [X = 4], [X = 5], [X = 6])$ est un système complet d'événements donc $\sum_{k=1}^{6} P(X = k) = 1$. On a donc :

$$p(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 1 \Leftrightarrow p \times \frac{6 \times 7}{2} = 1 \Leftrightarrow p = \frac{1}{21}$$

3. X est une VAR discrète finie donc elle admet une espérance et on a

$$E(X) = \sum_{k=1}^{6} kP(X = k) = \frac{1}{21}\sum_{k=1}^{6} k^2 = \frac{1}{21} \times \frac{6 \times 7 \times 13}{6} = \frac{13}{3}$$

4. On a $Y(\Omega) = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}\right\}$ et pour tout $x \in Y(\Omega)$ on a $x = \frac{1}{k}$ avec $k \in X(\Omega)$ et donc $P(Y = x) = P(X = k) = \frac{k}{21} = \frac{1}{21x}$.

$$E(Y) = \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{k} P(X = k) = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$$

Exercice 2

1.

y_i	0	1	4
$P(Y = y_i)$	1/6	1/2	1/3

$X \backslash Y$	0	1	4
-2	0	0	1/6
-1	0	1/4	0
0	1/6	0	0
1	0	1/4	0
2	0	0	1/6

2. $P([X = 1] \cap [Y = 0]) = 0$ et $P(X = 1)P(Y = 0) \neq 0$ donc les variables ne sont pas indépendantes.
3. $E(X) = 0$, $E(Y) = \frac{11}{6}$ et $E(XY) = \sum xyP([X = x] \cap [Y = y]) = 0$ donc $\text{cov}(X, Y) = 0$.

   Les VAR ne sont pas indépendantes et pourtant elles ont une covariance nulle.

Exercice 3

1. (i) Pour $x \notin [0;1]$ on a $f(x) = 0 \geqslant 0$ et si $x \in [0;1]$, $(1-x) \geqslant 0$ donc $f(x) \geqslant 0$.
f est bien une fonction à valeurs positives.

(ii) f est bien continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]1;+\infty[$ car f est la fonction nulle sur ces intervalles.
Sur $]0;1[$ f est la composée de fonction continues donc f est continue.
f est donc continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0;1\}$.

(iii) Les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$ sont convergentes car f est nulle sur ces intervalles et ces intégrales valent 0.

Sur $[0;1]$ la fonction f est continue donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ est convergente. De plus :

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \left[-(1-x)^{4/3}\right]_0^1 = 1$$

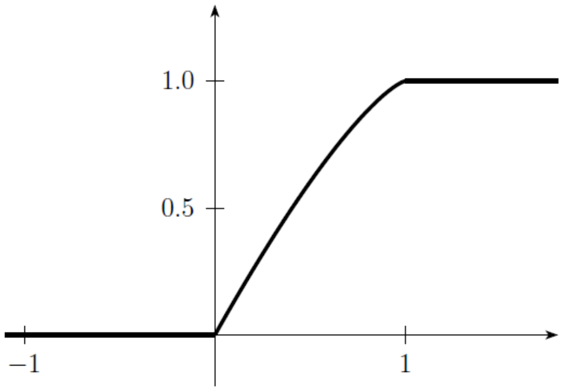
Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ est convergente et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

$\boxed{f \text{ est bien une densité de probabilité.}}$

2. Par définition $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.

- Si $x < 0$, $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$.
- Si $0 \leqslant x \leqslant 1$, $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \frac{4}{3}(1-t)^{1/3}\,dt = 1-(1-x)^{4/3}$.
- Si $x > 1$, $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^x f(t)\,dt = \int_0^1 \frac{4}{3}(1-t)^{1/3}\,dt = 1$.

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-(1-x)^{4/3} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}}$$



3. Pour les mêmes raisons qu'à la question 1, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$ est absolument convergente donc Y admet une espérance et :

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{4}{3} x(1-x)^{1/3}\,dx \\ &= \left[-x(1-x)^{4/3}\right]_0^1 + \int_0^1 (1-x)^{4/3}\,dx = \left[-\frac{3}{7}(1-x)^{7/3}\right]_0^1 = \frac{3}{7} \end{aligned}$$

$$\boxed{E(Y) = \frac{3}{7}}$$

4. $P(0,488 < Y \leqslant 1,2) = F(1,2) - F(0,488) = 1 - 1 + (1 - 0,488)^{4/3} = (0,512)^{4/3} = 0,4096$

Exercice 4

Notons X la VAR égale à la distance parcourue par le javelot. D'après l'énoncé, X suit une loi normale de paramètres m et σ.

Le but de cet exercice est de trouver m et σ.

L'énoncé nous dit que :

$$P(X > 75) = 0,1 \qquad \text{et} \qquad P(X < 50) = 0,25$$

On sait d'après le cours que lorsque X suit une loi normale de paramètres m et σ alors $X^* = \frac{X-m}{\sigma}$ suit une loi normale de paramètres 0 et 1.

Or $P(X > 75) = P(X - m > 75 - m) = P\left(\frac{X-m}{\sigma} > \frac{75-m}{\sigma}\right) = P\left(X^* > \frac{75-m}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{75-m}{\sigma}\right)$.

On a donc $1 - \Phi\left(\frac{75-m}{\sigma}\right) = 0,1 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{75-m}{\sigma}\right) = 0,9$.

D'après la table de valeurs on a donc $\frac{75-m}{\sigma} \approx 1,28$.

De même $P(X < 50) = \Phi\left(\frac{50-m}{\sigma}\right) = 0,25$.

Dans la table on ne trouve pas la valeur $0,25$ donc on va utiliser une petite astuce : $\Phi(-t) = 1 - \Phi(t)$.

On a donc $\Phi\left(\frac{50-m}{\sigma}\right) = 0,25 \Leftrightarrow 1 - \Phi\left(\frac{m-50}{\sigma}\right) = 0,25 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{m-50}{\sigma}\right) = 0,75$.

On déduit de la table de valeur que $\frac{m-50}{\sigma} \approx 0,67$.

Il nous faut donc maintenant résoudre le système :

$$\begin{cases} \dfrac{75-m}{\sigma} \approx 1,28 \\ \dfrac{m-50}{\sigma} \approx 0,67 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 75 - m \approx 1,28\sigma \\ m - 50 \approx 0,67\sigma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \approx 58,59 \\ \sigma \approx 12,82 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{La longueur moyenne parcourue par le javelot est } 58,69 \text{ et l'écart type est } 12,82.}$$

Exercice 5

1) $R_A(t) = \left(\exp\left(-\int_0^t 0,0025x^{-0,5}dx\right)\right)^2 = \left(\exp\left(-0,005\sqrt{t}\right)\right)^2 = \exp\left(-0,01\sqrt{t}\right)$; $R_A(1000) \simeq 0,73$

2) $R_B(t) = 1 - (1 - e^{-0,0025t})(1 - e^{-0,0035t})$; $R_B(1000) \simeq 0,11$

3) $R_S(t) = 1 - (1 - R_A(t))(1 - R_B(t))$; $R_S(1000) \simeq 0,76$

Exercice 6

1) $f_X(x) = \left(\int_{-\frac{1}{8}}^{\frac{1}{8}} \left(\frac{x}{2} + 6x^2 \right) dy \right) 1_{[-1;1]}(x) = \left(\frac{x}{2} + 6x^2 \right) \times \frac{1}{4} \times 1_{[-1;1]}(x) = \left(\frac{x}{8} + \frac{3}{2}x^2 \right) 1_{[-1;1]}(x)$

$f_y(y) = \left(\int_{-1}^{1} \left(\frac{x}{2} + 6x^2 \right) dx \right) 1_{\left[-\frac{1}{8};\frac{1}{8}\right]}(y) = \left[\frac{x^2}{4} + 2x^3 \right]_{-1}^{1} \times 1_{\left[-\frac{1}{8};\frac{1}{8}\right]}(y) = 4 \times 1_{\left[-\frac{1}{8};\frac{1}{8}\right]}(y)$

2) Pour tout (x ; y) : $f_X(x)\, f_Y(y) = f_{X,Y}(x\,;\,y)$, les deux variables aléatoires sont donc indépendantes.

Exercice 7

1) $P\left(N_{1095} - N_0 = 0\right) = e^{-0,025\times1095} \simeq 1,3\times10^{-12}$

2) $P\left(N_{1095} - N_0 = 2\right) = e^{-0,025\times1095} \times \frac{\left(0,025\times1095\right)^2}{2} \simeq 4,8\times10^{-10}$