Initiation aux probabilités **TS 13A**
Examen de juin 2014

Seuls les documents distribués avec le sujet et une calculatrice sont acceptés.
Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre que vous souhaitez.

Exercice 1 On considère un dé cubique, dont les faces sont numérotées de 1 à 6, truqué de sorte que la probabilité d'obtenir la face numéro k soit proportionnelle à k, avec pour coefficient de proportionnalité le réel p.
On lance une fois le dé et on note X le numéro de la face obtenue.
1. Déterminer la loi de X (en fonction de p).
2. Déterminer la valeur de p.
3. Calculer $E(X)$
4. On pose $Y = \frac{1}{X}$. Déterminer la loi de Y et $E(Y)$.

Exercice 2 Soit X une VAR discrète dont la loi est donnée par :

x_i	-2	-1	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

On considère la variable $Y = X^2$.
1. Déterminer la loi de Y ainsi que celle du couple (X, Y).
2. X et Y sont-elle indépendantes ?
3. Calculer $\mathrm{cov}(X, Y)$ et faire une remarque sur ce résultat.

Exercice 3 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}(1-x)^{\frac{1}{3}} & si \;\; 0 \le x \le 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1. Montrer que f est la densité d'une variable aléatoire Y.
2. Déterminer la fonction de répartition F de la variable Y et construire sa représentation graphique dans un repère orthonormal.
3. Calculer l'espérance de la variable Y.
4. Calculer la probabilité de l'événement $[0,488 < Y \le 61,2]$.

T.S.V.P.

Exercice 4 On suppose que la distance en mètres parcourue par un javelot suit une loi normale. Au cours d'un entrainement, on constate que :
– 10% des javelots atteignent plus de 75 mètres.
– 25% des javelots parcourent moins de 50 mètres.
Calculer la longueur moyenne parcourue par un javelot ainsi que l'écart-type de cette longueur.

Exercice 5

1) Soit un système A constitué de deux éléments en série de même taux de défaillance,

$$\lambda_1(t) = 0,0025t^{-0,5} \text{ pannes/heure.}$$

Déterminer la fiabilité de ce système.
Calculer cette fiabilité pour 1000 heures.

2) Soit un système B constitué de deux éléments en parallèle de taux de défaillance,

$$\lambda_2(t) = 0,0025 \text{ pannes/heure.}$$
$$\lambda_3(t) = 0,0035 \text{ pannes/heure.}$$

Déterminer la fiabilité de ce système.
Calculer cette fiabilité pour 1000 heures.

3) Dessinez le diagramme de fiabilité du système E obtenu en mettant en parallèle les systèmes A et B.
Déterminer alors la fiabilité du nouveau système.
Calculer ensuite cette fiabilité pour 1000 heures.

Exercice 6 Soit (X, Y) un couple de VAR de densité :

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} + 6x^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \text{ et } -\dfrac{1}{8} \leq y \leq \dfrac{1}{8} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Calculer les lois marginales de X et de Y.
2) Etudier l'indépendance du couple (X, Y).

Exercice 7 Après avoir observé la durée de vie des ILS, on a conclu que le temps de bon fonctionnement suivait une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,025$ pannes/jour.

1) En utilisant la loi de N_t, calculer la probabilité qu'il n'y ait aucune défaillance sur une période de 3 ans.
2) Calculer la probabilité qu'il y ait deux défaillances sur la même période.