Initiation aux probabilités **TSA 11B**

Correction Examen du 12/12/2012

Exercice 1

On a 5 boîtes numérotées de 1 à 5. La boîte k contient k boules numérotées de 1 à k.
On choisit une boîte au hasard, puis on tire au hasard une boule dans la boîte.
Soient X le numéro de la boîte choisie, et Y le numéro de la boule tirée.

1. Loi du couple (X, Y) :

X \ Y	1	2	3	4	5
1	$\frac{1}{5}$	0	0	0	0
2	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	0	0
3	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	0	0
4	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	0
5	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$
Loi de Y	$\frac{137}{300}$	$\frac{77}{300}$	$\frac{47}{300}$	$\frac{27}{300}$	$\frac{12}{300}$

2. $IE(Y)=\dfrac{137+77\times 2+47\times 3+27\times 4+12\times 5}{300}=2$.

3. Les variables X et Y ne sont pas indépendantes car : $IP\left(X=1;Y=2\right)=0\neq IP\left(X=1\right)\times IP\left(Y=2\right)$

4. IP(X = Y) $=\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{15}+\dfrac{1}{20}+\dfrac{1}{25}=\dfrac{137}{300}$.

Exercice 2 Soit f : $\left|\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ t\mapsto\begin{cases}\alpha t^2 & \text{si } t\in\left[1;2\right]\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}\end{array}\right.$

1. $\int_1^2 f(t)dt=\left[\dfrac{\alpha t^3}{3}\right]_1^2=\dfrac{7\alpha}{3}=1\Rightarrow\alpha=\dfrac{3}{7}$.

2. $F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\begin{cases}0 & \text{pour } x\leq 1\\ \dfrac{x^3-1}{7} & \text{pour } 1\leq x\leq 2\\ 1 & \text{pour } x\geq 2\end{cases}$.

T.S.V.P.

3. IE[X]= $\int_1^2 t\frac{3t^2}{7}dt = \frac{3}{7}\left[\frac{t^4}{4}\right]_1^2 = \frac{45}{28}$

Var(X) $= IE\left(X^2\right) - \left(IE(X)\right)^2 = \int_1^2 t^2\frac{3t^2}{7}dt - \left(\frac{45}{28}\right)^2 = \frac{3}{7}\left[\frac{t^5}{5}\right]_1^2 - \left(\frac{45}{28}\right)^2 = \frac{291}{3920}$.

Exercice 3

Une secrétaire effectue n appels téléphoniques vers n personnes distinctes ($n \geq 2$).
On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes, et que pour chaque appel la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est $p \in]0\ ;\ 1[$. On note $q = 1 - p$.
X désigne la variable aléatoire égale au nombre de personnes obtenues au téléphone.

1. $X \sim B(n, p)$, donc IE[X] = np et V (X) = npq.

Ayant obtenu k personnes, la secrétaire rappelle une deuxième fois, dans les mêmes conditions, chacune des n − k personnes qu'elle n'a pas réussi à joindre la première fois.
Soient Y le nombre de personnes obtenues dans la deuxième série d'appels, et Z = X + Y , le nombre total de personnes obtenues.

2. Z est à valeurs dans {0, 1, …, n}.
3. IP(Z = 0) = $(q^2)^n = q^{2n}$ car chaque personne est appelée 2 fois avec un résultat négatif à chaque fois.

IP(Z = 1) = $q^n\binom{n}{1}q^{n-1}p + \binom{n}{1}q^{n-1}pq^{n-1} = npq^{2n-2}(q+1)$ car on peut obtenir Z = 1 de 2 manières différentes : soit on obtient 0 personne (sur n) lors de ma première série et 1 personne (sur n) lors de la deuxième, soit on obtient 1 personne (sur n) lors de ma première série et 0 personne (sur n-1) lors de la deuxième.

Soient $k \in [\![0;n]\!]$ et $l \in [\![0;n-k]\!]$. On note Y_k la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes obtenues dans la deuxième série d'appels, sachant qu'il y a eu k personnes obtenues lors du premier appel (X = k).

4. $Y_k \sim B(n-k, p)$ donc $IP\left(Y_k = i\right) = \binom{n-k}{i}p^i q^{n-k-i}$

5. IP(Z = s) = $\begin{cases} = \sum_{i=0}^{s} IP\left(Y = i \middle| X = s-i\right) \times IP(X = s-i) \\ = \sum_{i=0}^{s}\binom{n-(s-i)}{i}p^i q^{n-s}\binom{n}{s-i}p^{s-i}q^{n-s+i} \\ = \sum_{i=0}^{s}\frac{n!}{i!(n-s)!(s-i)!}p^s q^{2n-2s+i} \\ = \frac{n!}{(n-s)!}p^s q^{2n-2s}\sum_{i=0}^{s}\frac{1}{i!(s-i)!}q^i \\ = \binom{n}{s}p^s q^{2(n-s)}(1+q)^s = \binom{n}{s}(1-q^2)^s q^{2(n-s)} \end{cases}$

et donc $Z \sim B\left(n, 1-q^2\right)$: ce qui parait logique car chaque personne se voit offrir une deuxième chance et la probabilité d'obtenir une personne est donc $1 - q^2$.

Exercice 4

Une usine fabrique des barres de 2m de long en moyenne. Soit X la longueur exacte d'une barre en mètres. On suppose que X suit une loi normale de paramètres $m = 2$ et σ^2.

1. Var(X) = σ^2 = IE(X^2) – (IE(X))^2 = 4,01 – m^2 = 4,01 – 4 = 0,01, donc σ = 0,1.

2. T = $\dfrac{X - IE(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite. $\dfrac{2,02-2}{0,1} = 0,2$ et $\dfrac{1,98-2}{0,1} = -0,2$.

$$IP(1,98 \le X \le 2,02) = IP(-0,2 \le T \le 0,2) = IP(T \le 0,2) - IP(T \le -0,2)$$
$$= IP(T \le 0,2) - (1 - IP(T \le 0,2)) \simeq 0,15852$$

3. Soit un intervalle I centré en m tel que IP($X \in$ I) = 0,9.

$$IP(2-a \le X \le 2+a) = 0,9 \Leftrightarrow IP(-10a \le T \le 10a) = 0,9$$
$$\Leftrightarrow 2IP(T \le 10a) - 1 = 0,9 \Leftrightarrow IP(T \le 10a) = 0,95$$

donc $a \simeq 0,165$ donc $\mathrm{I} = [1,835 \; ; \; 2,165]$

Exercice 5

1. Soit un système A constitué de deux éléments en série de même taux de défaillance,

$$\lambda_1(t) = 0,003t^{-0,4} \text{ pannes/heure.}$$

a) $R_A(t) = \left(\exp\left(-\int_0^t 0,003x^{-0,4}dx\right)\right)^2 = \left(\exp\left(-0,003\dfrac{t^{0,6}}{0,6}\right)\right)^2 = \exp\left(-0,01.t^{0,6}\right)$

b) $R_A(1000) \simeq 0,5321$

2. Soit un système B constitué de deux éléments en parallèle de taux de défaillance,

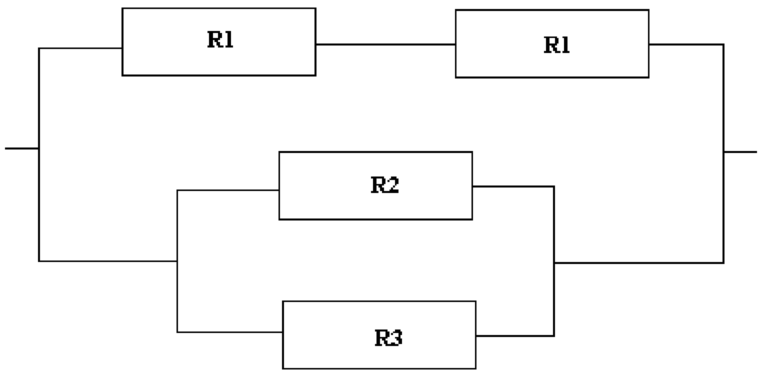
$$\lambda_2(t) = 0,001 \text{ pannes/heure.}$$
$$\lambda_3(t) = 0,003 \text{ pannes/heure.}$$

a) $R_B(t) = 1 - (1 - e^{-0,001t})(1 - e^{-0,003t})$

b) $R_B(1000) \simeq 0,3994$

3. Soit le système E obtenu en mettant en parallèle les systèmes A et B des questions précédentes.

a) Diagramme de fiabilité du système E :



b) $R_E(t) = 1 - (1 - R_A(t))(1 - R_B(t))$

c) $R_E(1000) \simeq 0,7189$

Exercice 6

Soit (*X, Y*) un couple de VAR de densité :

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}2xy+x^2 & \text{si } -1\leq x\leq 1 \quad \text{et} \quad -\dfrac{3}{4}\leq y\leq \dfrac{3}{4}\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

1. $f_X(x)=\left(\int_{-\frac{3}{4}}^{\frac{3}{4}}\left(2xy+x^2\right)dy\right)1_{[-1;1]}(x)=\left(\dfrac{3}{2}x^2\right)1_{[-1;1]}(x)$

$f_y(y)=\left(\int_{-1}^{1}\left(2xy+x^2\right)dx\right)1_{\left[-\frac{3}{4};\frac{3}{4}\right]}(y)=\left[x^2y+\dfrac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}\times 1_{\left[-\frac{3}{4};\frac{3}{4}\right]}(y)=\dfrac{2}{3}\times 1_{\left[-\frac{3}{4};\frac{3}{4}\right]}(y)$

2. $f_X(x)\,f_Y(y)\neq f_{X,Y}(x\,;y)$, les deux variables aléatoires sont donc dépendantes.

Exercice 7

Après avoir observé la durée de vie des machines à café, on a conclu que le temps de bon fonctionnement suivait une loi exponentielle de paramètre $\lambda=0{,}1$ pannes/jour.

1. $P\left(N_{365}-N_0=0\right)=e^{-0{,}1\times 365}\simeq 1{,}407\times 10^{-16}$

2. $P\left(N_{365}-N_0=3\right)=e^{-0{,}1\times 365}\times\dfrac{\left(0{,}1\times 365\right)^3}{6}\simeq 1{,}140\times 10^{-12}$