Initiation aux probabilités **TSA 11B**
Examen du 12/12/2012

Seuls les documents distribués avec le sujet sont acceptés.
Tout type de calculatrice est autorisé.
Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre que vous souhaitez.

Exercice 1

On a 5 boîtes numérotées de 1 à 5. La boîte k contient k boules numérotées de 1 à k.
On choisit une boîte au hasard, puis on tire au hasard une boule dans la boîte.
Soient X le numéro de la boîte choisie, et Y le numéro de la boule tirée.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y). (La représenter dans un tableau.)
2. Déterminer la loi de Y, et calculer son espérance.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.

Exercice 2

Soit f : $\left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} \alpha t^2 & \text{si } t \in [1;2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$

1. Déterminer α pour que f soit la densité de probabilité d'une variable aléatoire X.
2. Donner la fonction de répartition de X.
3. Calculer $\mathbb{E}[X]$ et Var(X).

Exercice 3

Une secrétaire effectue n appels téléphoniques vers n personnes distinctes ($n \geq 2$).
On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes, et que pour chaque appel la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est $p \in]0 ; 1[$. On note $q = 1 - p$.
X désigne la variable aléatoire égale au nombre de personnes obtenues au téléphone.

1. Quelle est la loi de X ? Donner $\mathbb{E}[X]$ et V (X).

Ayant obtenu k personnes, la secrétaire rappelle une deuxième fois, dans les mêmes conditions, chacune des $n - k$ personnes qu'elle n'a pas réussi à joindre la première fois.
Soient Y le nombre de personnes obtenues dans la deuxième série d'appels, et $Z = X + Y$, le nombre total de personnes obtenues.

2. Quelles sont les valeurs prises par Z ?
3. Calculer les probabilités $\mathbb{P}(Z = 0)$ et $\mathbb{P}(Z = 1)$.

Soient $k \in [\![0;n]\!]$ et $l \in [\![0;n-k]\!]$. On note Y_k la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes obtenues dans la deuxième série d'appels, sachant qu'il y a eu k personnes obtenues lors du premier appel ($X = k$).

4. Déterminer la loi de Y_k.

5. En remarquant que $\mathbb{P}(Z = s) = \sum_{i=0}^{s} \mathbb{P}\left(Y = i \middle| X = s - i\right) \times \mathbb{P}(X = s - i)$, déterminer la loi de Z.

T.S.V.P.

Exercice 4

Une usine fabrique des barres de 2m de long en moyenne. Soit X la longueur exacte d'une barre en mètres. On suppose que X suit une loi normale de paramètres $m = 2$ et σ^2.

1. Sachant que IE(X^2) = 4,01, déterminer σ.
2. Calculer la probabilité qu'une barre mesure entre 1,98 m et 2,02 m.
3. Déterminer un intervalle I centré en m tel que IP($X \in$ I) = 0,9.

Exercice 5

1. Soit un système *A* constitué de deux éléments en série de même taux de défaillance,

$$\lambda_1(t) = 0,003t^{-0,4} \text{ pannes/heure.}$$

a) Déterminer la fiabilité de ce système.
b) Calculer cette fiabilité pour 1000 heures.

2. Soit un système *B* constitué de deux éléments en parallèle de taux de défaillance,

$$\lambda_2(t) = 0,001 \text{ pannes/heure.}$$
$$\lambda_3(t) = 0,003 \text{ pannes/heure.}$$

a) Déterminer la fiabilité de ce système.
b) Calculer cette fiabilité pour 1000 heures.

3. Soit le système *E* obtenu en mettant en parallèle les systèmes *A* et *B* des questions précédentes.
a) Dessiner le diagramme de fiabilité du système *E*.
b) Déterminer alors la fiabilité du nouveau système.
c) Calculer ensuite cette fiabilité pour 1000 heures.

Exercice 6

Soit (*X, Y*) un couple de VAR de densité :

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2xy + x^2 & \text{si } -1 \le x \le 1 \text{ et } -\dfrac{3}{4} \le y \le \dfrac{3}{4} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer les lois marginales de *X* et de *Y*.
2. Etudier l'indépendance du couple (*X, Y*).

Exercice 7

Après avoir observé la durée de vie des machines à café, on a conclu que le temps de bon fonctionnement suivait une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,1$ pannes/jour.

1. En utilisant la loi de N_t, calculer la probabilité qu'il n'y ait aucune défaillance sur une période de 1 an.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait 3 défaillances sur la même période.