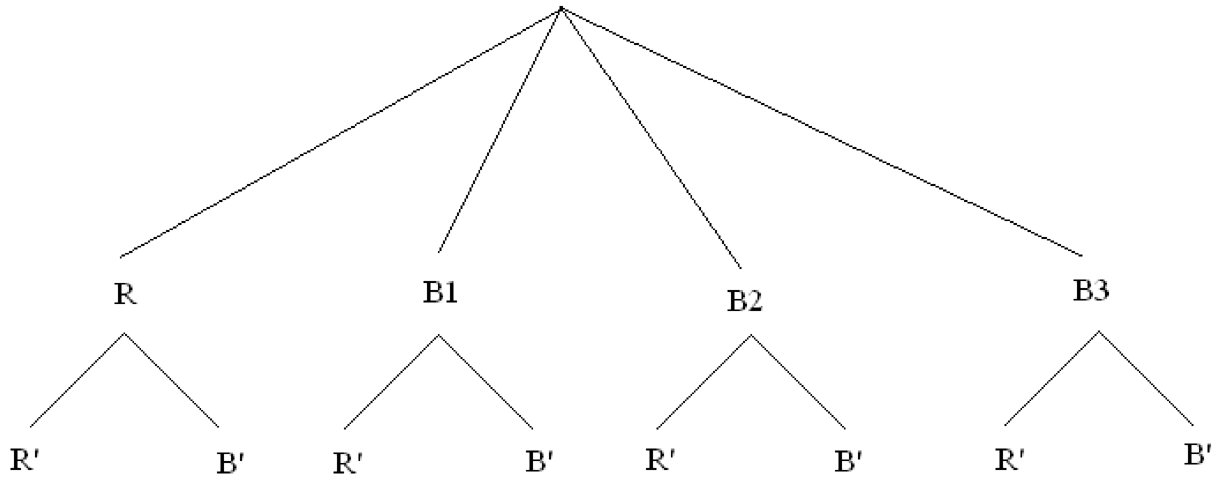
Initiation aux probabilités **TS 12B**
Examen de décembre 2013

Correction

Exercice 1 On dispose de deux boîtes. Dans une première boîte, il y a quatre boules : une rouge R et trois bleues B1, B2 et B3. Dans la seconde boîte, il y a deux boules, une rouge R' et une bleue B'.
On tire au hasard une boule de la première boîte, puis une boule de la seconde.

1. Représentez cette expérience à l'aide d'un arbre et déterminer le nombre de tirage différents.



2. Calculez les probabilités des évènements suivants :

A : "les deux boules sont de couleurs différentes" $IP(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

B : "la première boule est rouge" $IP(B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

C : "une seule boule est rouge" $IP(C) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

D : "les deux boules sont bleues" $IP(D) = \frac{3}{8}$

Exercice 2 Sur une voie unique se trouve un feu de signalisation :
il clignote pendant 2 minutes et les voitures passent
puis il passe au rouge pendant 1,5 minute et les voitures s'arrêtent (en attente de passer).
A un instant *t* non lié au fonctionnement du signal, une voiture arrive.
Soit une variable aléatoire X égale au temps écoulé (en min) du début à la fin d'un cycle "clignotant-attente", donc X uniforme sur [0 ; 3,5]
1°) Quelle est la probabilité que la voiture arrive au feu alors qu'il clignote ?

IP(clignote) = $IP(X \leq 2)$ = 2/3,5 = 4/7

2°) On considère la variable aléatoire T " temps d'attente au feu".

i) IP(T=0) :

$$P(T=0)=P(x\leq 2)=\frac{4}{7}$$

ii) IP(T $\leq x$) pour $x \in \left]0;\frac{3}{2}\right]$:

Si $T\leq x$, alors nous avons 2 cas :
* ou bien $X\leq 2$
* ou bien $X>2$

Par conséquent : $P(T\leq x)=P[(T\leq x)\cap(X\leq 2)]+P[(T\leq x)\cap(X>2)]$

Or $P[(T\leq x)\cap(X\leq 2)]=P(X\leq 2)=\frac{4}{7}$ et $P[(T\leq x)\cap(X>2)]$ peut se calculer par la probabilité conditionnelle :

$$P[(T\leq x)\cap(X>2)]=P_{(X>2)}(T\leq x)\times P(X>2) \implies P[(T\leq x)\cap(X>2)]=\frac{x}{1,5}\times\frac{1,5}{3,5}$$

Moralité :

$$P(T\leq x)=\frac{4}{7}+\frac{x}{1,5}\times\frac{1,5}{3,5}=\frac{4}{7}+\frac{2x}{3}\times\frac{3}{7}=\frac{4}{7}+2x\times\frac{1}{7}=\frac{4+2x}{7}$$

Exercice 3 Soient deux avions : un biréacteur B et un quadriréacteur Q.
On suppose que tous les réacteurs de ces avions ont la même probabilité p de tomber en panne, et qu'ils sont indépendants les uns des autres.
Appelons X et Y les variables aléatoires suivantes :
X: « nombre de réacteurs de B, tombant en panne »
Y: « nombre de réacteurs de Q, tombant en panne »

1. Etablir les lois de probabilité de X et Y :
On peut considérer qu'il s'agit d'épreuves de Bernouilli, indépendantes, dont la probabilité de succès ("tomber en panne") est p, renouvelées 2 fois pour B et 4 fois pour Q.
Alors X suit une loi binomiale de paramètres 2 et p:

$$\forall k\in[\![0,2]\!], p(X=k)=\binom{2}{k}p^k(1-p)^{2-k}=\frac{2!}{k!(2-k)!}p^k(1-p)^{2-k}$$

donc: $p(X=0)=(1-p)^2$; $p(X=1)=2p(1-p)$; $p(X=2)=p^2$.
Et Y suit une loi binomiale de paramètres 4 et p:

$$\forall k\in[\![0,4]\!], p(X=k)=\binom{4}{k}p^k(1-p)^{4-k}=\frac{4!}{k!(4-k)!}p^k(1-p)^{4-k}$$

donc: $p(Y=0)=(1-p)^4$; $p(Y=1)=4p(1-p)^3$; $p(Y=2)=6p^2(1-p)^2$; $p(Y=3)=4p^3(1-p)$; $p(Y=4)=p^4$.

2. On estime qu'un avion ne peut achever son vol que si la moitié au moins de ses réacteurs fonctionnent normalement. Soient P_B et P_Q les probabilités d'un vol réussi respectivement par B et par Q.

Calculer P_B et P_Q en fonction de p. Indiquer selon les valeurs de p, celui des deux avions B ou Q qui offre la meilleure sécurité.

$$P_B = p(X=0) + p(X=1) = 1 - p(X=2) = 1 - p^2$$
$$P_Q = p(Y=0) + p(Y=1) + p(Y=2) = 1 - p(Y=4) - p(Y=3)$$
$$= 1 - p^4 - 4p^3(1-p) = 1 - p^4 - 4p^3 + 4p^4 = 1 - 4p^3 + 3p^4$$

Étudions le signe de

$P_Q - P_B = 3p^4 - 4p^3 + 1 - (1-p^2) = 3p^4 - 4p^3 + p^2 = p^2(3p^2 - 4p + 1)$ du signe de $3p^2 - 4p + 1$

$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4 \times 3 \times 1 = 16 - 12 = 4$

$p_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4-2}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ et $p_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4+2}{6} = 1$

- pour $0 \leqslant p \leqslant \frac{1}{3}$: $P_Q - P_B \geqslant 0$; $P_Q \geqslant P_B$. Le vol Q offre la meilleure sécurité.
- pour $\frac{1}{3} \leqslant p \leqslant 1$: $P_Q - P_B \leqslant 0$; $P_Q \leqslant P_B$. Le vol B offre la meilleure sécurité.

Exercice 4 Le contrôle du poids (en grammes) des pièces fabriquées par une même machine permet de conclure que ces poids suivent une loi normale de moyenne 462 et de variance 2,89.

1. Quelle est la probabilité pour que le poids d'une pièce soit inférieur à 465,06 grammes?

X suit une loi normale de paramètres 462 et $\sqrt{2.89} = 1.7$ donc $X* = \frac{X - 462}{1.7}$ suit la loi normale centrée réduite.

$p(X < 465.06) = p(X* < \frac{465.06 - 462}{1.7}) = p(X* < 1.8)$

or on lit dans la table de la loi normale centrée réduite: $p(X* < 1.8)$ = 0.9641

donc $p(X < 465.06)$ = 96.41%

2. Quelle est la probabilité pour que le poids d'une pièce dépasse 463,989 grammes ?

$p(X > 463.99) = p(X* > \frac{463.99 - 462}{1.7}) = p(X* > 1.17) = 1 - p(X* < 1.17)$

or on lit dans la table: $p(X* < 1.17)$ = 0.8790

donc $p(X > 463.99)$ = 1-0.8790=0.1210 = 12.10%

Exercice 5

1) Soit un système A constitué de deux éléments en série de même taux de défaillance,

$$\lambda_1(t) = 0,003t^{-0,5} \text{ pannes/heure.}$$

Déterminer la fiabilité de ce système.

$R_A(t) = \left(\exp\left(-\int_0^t 0,003x^{-0,5}dx\right)\right)^2 = \left(\exp\left(-0,006\sqrt{t}\right)\right)^2 = \exp\left(-0,012\sqrt{t}\right)$;

Calculer cette fiabilité pour 1000 heures. $R_A(1000) \simeq 0,6842$

2) Soit un système B constitué de deux éléments en parallèle de taux de défaillance,

$$\lambda_2(t) = 0,004 \text{ pannes/heure.}$$
$$\lambda_3(t) = 0,002 \text{ pannes/heure.}$$

Déterminer la fiabilité de ce système. $R_B(t) = 1 - (1 - e^{-0,004t})(1 - e^{-0,002t})$;
Calculer cette fiabilité pour 1000 heures. $R_B(1000) \simeq 0,1512$

3) Dessinez le diagramme de fiabilité du système E obtenu en mettant en parallèle les systèmes A et B.
Déterminer alors la fiabilité du nouveau système. $R_S(t) = 1 - (1 - R_A(t))(1 - R_B(t))$;
Calculer ensuite cette fiabilité pour 1000 heures. $R_S(1000) \simeq 0,7320$

Exercice 6 La loi de probabilité d'un couple (X, Y) de deux variables aléatoires X et Y définies sur un même univers est donnée par le tableau suivant :

X \ Y	-2	-1	0	1	2
-1	0,02	0,04	0,08	0,04	0,02
0	0,06	0,04	0,30	0,07	0,03
1	0,02	0,12	0,02	0,09	0,05

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y.

Pour X :

$p(X=-1) = 0.02 + 0.04 + 0.08 + 0.04 + 0.02 = 0.20$
$p(X=0) = 0.06 + 0.04 + 0.30 + 0.07 + 0.03 = 0.50$
$p(X=1) = 0.02 + 0.12 + 0.02 + 0.09 + 0.05 = 0.30$

Pour Y :

$p(Y=-2) = 0.02 + 0.06 + 0.02 = 0.10$
$p(Y=-1) = 0.04 + 0.04 + 0.12 = 0.20$
$p(Y=0) = 0.08 + 0.30 + 0.02 = 0.40$
$p(Y=1) = 0.04 + 0.07 + 0.09 = 0.20$
$p(Y=2) = 0.02 + 0.03 + 0.05 = 0.10$

2. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

$p((X=0)\cap(Y=-2)) = 0.06$ et $p(X=0)p(Y=-2) = 0.50 \times 0.10 = 0.05$
donc $p((X=0)\cap(Y=-2))\ p(X=0)p(Y=-2)$ donc les variables X et Y ne sont pas indépendantes.

3. Calculer la probabilité de l'évènement (X+Y = 0).

$$p(X+Y=0) = p((X=-1)\cap(Y=1)) + p((X=0)\cap(Y=0)) + p((X=1)\cap(Y=-1))$$
$$= 0.04 + 0.30 + 0.12 = 0.46$$

4. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire H = XY.

Dans ce tableau, pour chaque colonne, la première sous-colonne représente la valeur de XY et la deuxième reprend la probabilité associée :

X \ Y	-2		-1		0		1		2	
-1	2	0,02	1	0,04	0	0,08	-1	0,04	-2	0,02
0	0	0,06	0	0,04	0	0,3	0	0,07	0	0,03
1	-2	0,02	-1	0,12	0	0,02	1	0,09	2	0,05

donc $p(XY = -2) = 0.02 + 0.02 = 0.04$

$p(XY = -1) = 0.04 + 0.12 = 0.16$

$p(XY = 0) = 0.06 + 0.04 + 0.08 + 0.30 + 0.07 + 0.03 + 0.02 = 0.60$

$p(XY = 1) = 0.04 + 0.09 = 0.13$

$p(XY = 2) = 0.02 + 0.5 = 0.07$

Exercice 7 Après avoir observé la durée de vie des ILS, on a conclu que le temps de bon fonctionnement suivait une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,04$ pannes/jour.

1) En utilisant la loi de N_t, calculer la probabilité qu'il n'y ait aucune défaillance sur une période de 4 ans. $P\left(N_{1461} - N_0 = 0\right) = e^{-0,04\times1461} \simeq 4,167\times10^{-26}$
2) Calculer la probabilité qu'il y ait deux défaillances sur la même période.

$$P\left(N_{1461} - N_0 = 2\right) = e^{-0,04\times1461} \times \frac{\left(0,04\times1461\right)^2}{2} \simeq 7,116\times10^{-23}$$