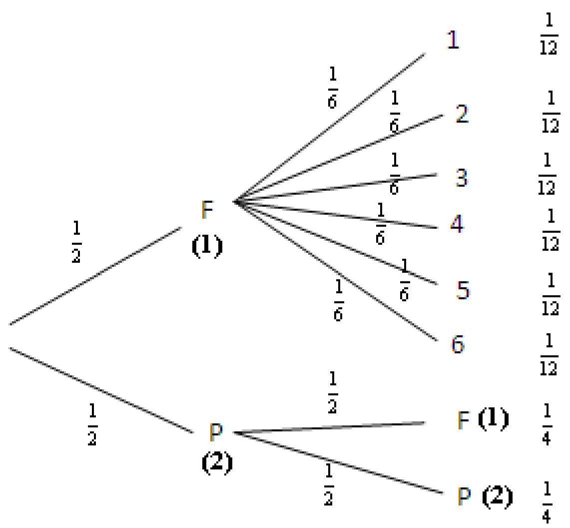
Initiation aux probabilités **TSA 11A**
Examen du 10/07/2012

Correction

Exercice 1

a)



Comme on le voit sur l'arbre, chaque issue n'ayant pas la même probabilité, il n'y a pas équiprobabilité.

b)

(i) $P(X = 1) = \frac{1}{2}$

(ii) $P(Y = 2) = P(Y=2|X=1)P(X=1)+P(Y=2|X=2)P(X=2) = \frac{1}{6}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

(iii) $P(X = 1 \mid Y = 2) = \frac{P(X=1;Y=2)}{P(Y=2)}=\frac{P(Y=2|X=1)P(X=1)}{P(Y=2)}=\frac{\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{4}$

c)

X \ Y	1	2	3	4	5	6	Loi de X
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$
Loi de Y	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	1

Exercice 2

a) $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta} & \text{si } 0\le x\le \theta\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

b) Soient F_A et F_B les fonctions de répartition du temps d'attente chez les coiffeurs A et B respectivement ; T la variable aléatoire du temps d'attente de Nicole, et D la variable aléatoire qui donne le résultat du dé.

$$P(T\ge 25|D=5)=1-F_A(25)=1-\frac{25}{30}=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$$

$$P(T\le 15)=F_A(15)\times P(D\in\{5;6\})+F_B(15)\times P(D\in\{1;2;3;4\})=\frac{15}{30}\times\frac{2}{6}+\frac{15}{20}\times\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

$$P(D=4|T\ge 15)=\frac{P(D=4;T\ge 15)}{P(T\ge 15)}=\frac{\frac{1}{6}\times\left(1-\frac{15}{20}\right)}{1-\frac{2}{3}}=\frac{1}{8}$$

Exercice 3

1) $P(X=0)\le 0,05 \Leftrightarrow 0,98^n\le 0,05 \Leftrightarrow n\ge\dfrac{\ln(0,05)}{\ln(0,98)}$. Donc $n\ge 149$.

2) $P(X\ge 1)\ge 0,80 \Leftrightarrow 1-P(X=0)\ge 0,80 \Leftrightarrow n\ge\dfrac{\ln(0,2)}{\ln(0,98)}$. Donc $n\ge 80$

Exercice 4

1) $$F_T(t)=P\left(\frac{X-m}{\sigma}\le t\right)=P(X\le\sigma t+m)=\int_{-\infty}^{\sigma t+m}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right)}dx \underset{u=\frac{x-m}{\sigma}}{=} \int_{-\infty}^{t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\left(-\frac{1}{2}u^2\right)}du$$

T suit donc une loi normale centrée réduite.

2) a) $P(X\le 27)=P(T\le 3)\simeq 0,99865$ car $\dfrac{27-15}{4}=3$

b) $P(X\ge 3)=P(T\ge -3)=P(T\le 3)\simeq 0,99865$ car $\dfrac{3-15}{4}=-3$

c) $P(3\le X\le 27)=P(X\le 27)-P(X\le 3)=P(X\le 27)-\left(1-P(X\ge 3)\right)\simeq 0,99730$.

Exercice 5

1) $R_A(t) = \left(\exp\left(-\int_0^t 0,002x^{-0,5}dx\right)\right)^2 = \left(\exp\left(-0,004\sqrt{t}\right)\right)^2 = \exp\left(-0,008\sqrt{t}\right)$; $R_A(1000) \simeq 0,7765$

2) $R_B(t) = 1 - (1 - e^{-0,002t})(1 - e^{-0,003t})$; $R_B(1000) \simeq 0,1783$

3) $R_S(t) = 1 - (1 - R_A(t))(1 - R_B(t))$; $R_S(1000) \simeq 0,8164$

Exercice 6

1) $$f_X(x) = \left(\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}}\left(\frac{x}{4}+3x^2\right)dy\right)1_{[-1;1]}(x) = \left(\frac{x}{4}+3x^2\right)\times\frac{1}{2}\times 1_{[-1;1]}(x) = \left(\frac{x}{8}+\frac{3}{2}x^2\right)1_{[-1;1]}(x)$$

$$f_y(y) = \left(\int_{-1}^{1}\left(\frac{x}{4}+3x^2\right)dx\right)1_{\left[-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right]}(y) = \left[\frac{x^2}{8}+x^3\right]_{-1}^{1}\times 1_{\left[-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right]}(y) = 2\times 1_{\left[-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right]}(y)$$

2) Pour tout (x ; y) : $f_X(x)\,f_Y(y) = f_{X,Y}(x\,;y)$, les deux variables aléatoires sont donc indépendantes.

Exercice 7

1) $P\left(N_{1095} - N_0 = 0\right) = e^{-0,05\times 1095} \simeq 1,67\times 10^{-24}$

2) $P\left(N_{1095} - N_0 = 2\right) = e^{-0,05\times 1095}\times\dfrac{(0,05\times 1095)^2}{2} \simeq 2,50\times 10^{-21}$