Initiation aux probabilités **TSA 11A**
Examen du 10/07/2012

Seuls les documents distribués avec le sujet sont acceptés.
Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre que vous souhaitez.

Exercice 1 On lance une pièce de monnaie. Si l'on obtient `face' on jette un dé; si l'on obtient `pile' on lance à nouveau la pièce de monnaie. On suppose que la pièce et le dé sont tous les deux équilibrés, et que les jets sont indépendants.

a) Décrire explicitement l'ensemble fondamental Ω lié à cette expérience. Les éléments de Ω sont-ils équiprobables ?

On associe le nombre 1 à `face' et le nombre 2 à `pile'; définissons les variables aléatoires
X = nombre obtenu au premier lancé (pièce uniquement),
Y = nombre obtenu au deuxième lancé (pièce ou dé).

b) Calculer :
   (i) P(X = 1),
   (ii) P(Y = 2),
   (iii) P(X = 1 | Y = 2).
c) Déterminer la loi conjointe de X et Y . (Suggestion: faire un tableau!)

Exercice 2 Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme U(0; θ) avec la fonction de répartition suivante :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \dfrac{x}{\theta} \text{ si } 0 \le x \le \theta \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$$

a) Quelle est la fonction de densité de X ?
b) Nicole aimerait aller chez le coiffeur, mais n'arrive pas à se décider entre le coiffeur A et le coiffeur B. Alors elle jette un dé équilibré : si elle obtient un 5 ou un 6 elle va chez le coiffeur A, si elle obtient un 1,2,3, ou 4 elle opte pour le coiffeur B. Supposons que le temps d'attente (en minutes) est une variable aléatoire uniforme U(0; 30) chez le coiffeur A, et une variable aléatoire uniforme U(0; 20) chez le coiffeur B. Calculer :
   (i) la probabilité que Nicole attende plus que 25 minutes, sachant que le résultat du dé est 5,
   (ii) la probabilité que Nicole attende moins que 15 minutes,
   (iii) la probabilité que Nicole ait lancé un 4, sachant qu'elle attend plus que 15 minutes.

Exercice 3 Soit X une V.A.R. binomiale de paramètres n et 0,02, notée $B(n; 0{,}02)$.

1) Déterminer n pour que $\mathbb{P}(X = 0) \le 0{,}05$.

2) Déterminer n pour que $\mathbb{P}(X \ge 1) \ge 0{,}80$.

T.S.V.P.

Exercice 4 Soit X une VAR, suivant une loi normale de paramètre m et σ^2.

1) Montrer que $T = \dfrac{X-m}{\sigma}$ suis une loi normale centrée réduite.

2) La V.A.R. X suit maintenant une loi normale de moyenne 15 et de variance 16, notée $N(15; 16)$.
En utilisant la question précédente, calculer les probabilités suivantes :

a) $\mathbb{P}\left(X \leq 27\right)$,

b) $\mathbb{P}\left(X \geq 3\right)$,

c) $\mathbb{P}\left(3 \leq X \leq 27\right)$.

Exercice 5

1) Soit un système A constitué de deux éléments en série de même taux de défaillance,

$$\lambda_1(t) = 0{,}002t^{-0{,}5} \text{ pannes/heure.}$$

Déterminer la fiabilité de ce système.
Calculer cette fiabilité pour 1000 heures.

2) Soit un système B constitué de deux éléments en parallèle de taux de défaillance,

$$\lambda_2(t) = 0{,}002 \text{ pannes/heure.}$$
$$\lambda_3(t) = 0{,}003 \text{ pannes/heure.}$$

Déterminer la fiabilité de ce système.
Calculer cette fiabilité pour 1000 heures.

3) Dessinez le diagramme de fiabilité du système E obtenu en mettant en parallèle les systèmes A et B.
Déterminer alors la fiabilité du nouveau système.
Calculer ensuite cette fiabilité pour 1000 heures.

Exercice 6 Soit (X, Y) un couple de VAR de densité :

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{4} + 3x^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \text{ et } -\dfrac{1}{4} \leq y \leq \dfrac{1}{4} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Calculer les lois marginales de X et de Y.
2) Etudier l'indépendance du couple (X, Y).

Exercice 7 Après avoir observé la durée de vie des ILS, on a conclu que le temps de bon fonctionnement suivait une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}05$ pannes/jour.

1) En utilisant la loi de N_t, calculer la probabilité qu'il n'y ait aucune défaillance sur une période de 3 ans.
2) Calculer la probabilité qu'il y ait deux défaillances sur la même période.