Initiation aux Statistiques **TSA 14A**

CORRECTION Examen du 16/07/2015

Exercice 1

1- On donne ci-dessous les notes obtenues par les élèves d'une classe de Terminale S en mathématiques au bac :

Notes	2	6	8	9	10	11	12	14	15	16	17	19	20
Effectif	1	2	4	4	2	4	5	2	4	2	3	1	1

a) Calculer la moyenne (11,88) et l'écart type des notes (3,95).

b) Représenter la boîte à moustaches de cette série.

Q1 = 9 ; Med = 12 ; Q3 = 15

c) Déterminer un intervalle de confiance à 95% de la moyenne à l'épreuve de mathématiques à partir de ces données. $n > 30$; $I = [10{,}57 ; 13{,}19]$

2- On donne ci-dessous les notes obtenues par 20 bacheliers en mathématiques et en philosophie :

Maths	8	8	9	9	10	11	11	11	12	12	12	12	15	15	15	16	17	17	19	20
Philo	7	10	9	8	13	10	10	8	13	11	9	10	16	14	13	14	18	16	18	18

a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre les notes de mathématiques et celles de philosophie $r \simeq 0{,}90$. Un ajustement affine est-il envisageable ? oui.

b) Déterminer une équation de la droite de régression linéaire. $y = 0{,}90\,x + 0{,}66$.

Exercice 2

Une étude a été menée sur la durée de vie d'organismes radioactifs.

15 organismes ont été étudiés et les durées de vie (exprimées en heures) ont été relevées :

Durées de vie	130	134*	152	195	256	421	475	500*	563	676	702	811	820*	856	900*

Les durées de vie suivies d'un astérisque correspondent à des retraits d'organismes en cours d'expérience.

1- Calculer une estimation de la fiabilité de ses organismes en utilisant la méthode de Johnson.

Temps	130	134*	152	195	256	421	475	500*	563	676	702	811	820*	856	900*
fiabilité	0,95	0,95	0,88	0,82	0,75	0,68	0,61	0,61	0,53	0,45	0,37	0,29	0,29	0,19	0,19

2- On modélise leur durée de vie par une loi exponentielle de paramètre λ.

Estimer graphiquement la durée de vie moyenne. En déduire une valeur approchée du paramètre λ.

$\text{MTTF} \simeq 710$; $\lambda \simeq 1{,}5.10^{-3}$

Exercice 3

Dans une commune, le contrôle sanitaire des eaux permet d'annoncer une teneur moyenne en nitrates de 6,6mg/L.

Une association de riverains organise un contrôle sur 56 maisons d'un lotissement. La teneur moyenne observée est de 7,5mg/L avec un écart type de 2,3.

1- Déterminer, à partir de l'échantillon, un intervalle de confiance à 99% de la teneur moyenne en nitrates. $n > 30$; $I = [\,6{,}71 ; 8{,}29]$

2- L'association peut-elle remettre en cause le contrôle effectué sur la commune ? oui, car la valeur annoncée n'est pas dans l'intervalle de confiance à 99% !

Exercice 4

Une chaîne de magasins distribue des bons d'achats à ses clients sous forme de tickets « à gratter ».
Selon le règlement, les bons gagnants se répartissent de la façon suivante :
50% de bons de 5€ ; 30% de bons de 10€ ; 10% de bons de 20€ ; 7% de bons de 50€ ; 3% de bons de 100€.
Dans un magasin, 200 bons utilisés se sont répartis de la façon suivante :
121 bons de 5€ ; 56 bons de 10€ ; 19 bons de 20€ ; 3 bons de 50€ ; 1 bon de 100€
Le Directeur du magasin considéré estime que la répartition des bons d'achat dans les différents magasins de la chaîne n'a pas été équitable. Peut-on considérer, au risque de 5% qu'il a raison ?

On réalise un test d'adéquation .

5€	10€	20€	50€	100€
0,5	0,3	0,1	0,07	0,03
121	56	19	3	1

$$t_{200}=\frac{(121-200\times0,5)^2}{200\times0,5}+\frac{(56-200\times0,3)^2}{200\times0,3}+\frac{(19-200\times0,1)^2}{200\times0,1}+\frac{(3-200\times0,07)^2}{200\times0,07}+\frac{(1-200\times0,03)^2}{200\times0,03}\simeq17,54$$

$\chi^2_{4;0,95}=9,488<t_{200}$. Au risque de 5%, on rejette l'hypothèse d'adéquation ;
on en déduit que le Directeur a raison d'émettre des doutes.

Exercice 5

Après avoir observé la durée de vie de composants électroniques d'un tableau de bord, on a obtenu le tableau suivant donnant les instants de défaillance, exprimés en mois :

Instants de défaillance	7	9	13	21	24	36	41	62	64	71

1- Faire un test non paramétrique en regroupant les défaillances par dizaines de mois pour savoir si le processus de Poisson suivi par les instants de défaillances est homogène (au risque de 5%).

$$z_{10}=\frac{8}{10}\left(3\times\left(2-\frac{10}{8}\right)^2+4\times\left(1-\frac{10}{8}\right)^2+1\times\left(0-\frac{10}{8}\right)^2\right)=2,8<\chi^2_{7;0,95}=14,067\,.$$

On en déduit qu'au seuil de 5% , on accepte l'hypothèse d'homogénéité.

2- On suppose désormais que le processus de Poisson est homogène de paramètre λ.

a) Soit T_i le temps de la i-ème défaillance. Montrer que l'estimateur $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{T_i}{i}$ est un estimateur sans biais de $\frac{1}{\lambda}$.

si (T_n) est un processus de Poisson homogène de paramètre λ, T_n suit une loi Gamma $\gamma(n,\lambda)$, c'est à dire a pour espérance $\frac{n}{\lambda}$.

$$IE\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{T_i}{i}\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{IE(T_i)}{i}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i/\lambda}{i}=\frac{1}{\lambda}$$ donc $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{IE(T_i)}{i}$ est un estimateur sans biais de $\frac{1}{\lambda}$.

b) Donner une estimation du paramètre λ.

$$\widehat{\frac{1}{\lambda}}=\frac{1}{10}\left(7+\frac{9}{2}+\frac{13}{3}+\frac{21}{4}+\frac{24}{5}+\frac{36}{6}+\frac{41}{7}+\frac{62}{8}+\frac{64}{9}+\frac{71}{10}\right)\simeq6\,.$$ On peut donc estimer λ par 0,17.