

Seuls les documents distribués avec le sujet sont acceptés. Les calculatrices sont acceptées.
Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre que vous souhaitez.

Exercice 1

Soit X de loi $U([0; a])$ et (X_1, \dots, X_n) un n -échantillon de X . On cherche à estimer a .

On note \bar{X} la moyenne empirique de X .

1. Soit $T_n = 2\bar{X}$. Montrer que T_n est un estimateur sans biais de a et qu'il est convergent.

2. Soit $Y_n = \max(X_1, \dots, X_n)$.

Donner la fonction de répartition de X , puis déterminer celle de Y_n .

En déduire une densité de Y_n , puis son biais et sa variance.

3. Soit $Z_n = \frac{n+1}{n} Y_n$. Montrer que Z_n est un estimateur sans biais de a et qu'il est convergent.

4. Pour de grandes valeurs de n , quelle est le meilleur estimateur de a ?

Exercice 2

Nous observons deux caractères statistiques sur une population de 10 décathloniens. Il s'agit de la longueur maximale atteinte (en mètre) lors de cinq lancers de poids et de la longueur maximale atteinte (en mètre également) sur cinq tentatives de saut en longueur. Le tableau suivant représente les observations de ces deux caractères.

Lancer de poids	18.75	17.05	15.83	19.58	11.31	18.58	17.16	14.80	16.32	16.90
Saut en longueur	6.51	7.60	6.33	7.49	5.36	7.57	7.98	6.74	8.12	8.08

1. Calculer les paramètres de position des deux séries (moyenne et médiane).

2. Calculer les paramètres de dispersion des deux séries (variance; écart-type et écart inter-quartile).

3. Donner l'équation de la droite de régression.

4. Calculer le coefficient de corrélation entre les deux séries, puis dire s'il y a une dépendance entre les deux caractères statistiques.

Exercice 3

Nous avons observé 9 ILS jusqu'à ce que chacun ait une défaillance. Le tableau suivant donne les temps, en jour, de première défaillance pour chaque ILS.

ILS	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Temps	130	20	348	100	14	212	64	50	135

1. Déterminer une estimation de $R(t)$.

2. En supposant que le temps de bon fonctionnement suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,006$ panne/jour, déterminer à quel instant t_0 , la fiabilité est égale à 85%.
3. Calculer la probabilité qu'un ILS n'ait aucune défaillance sur une période d'un an.
4. Donner une estimation du MTTF et du paramètre λ en considérant que l'on peut modéliser le temps de bon fonctionnement des éléments étudiés par une loi exponentielle.

Exercice 4

Un parc de 13 photocopieurs a été testé et nous avons observé leurs temps de première défaillance, et ce jusqu'à une période d'un an maximum.

Photocopieurs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Temps (jours)	149	360	365**	365**	40	66	15	365**	260	150*	150*	166	275*

Les temps suivis d'une astérisque correspondent à des photocopieurs ayant été retirés de l'étude avant la fin des tests. Ces photocopieurs doivent être considérés comme des éléments suspendus. Les temps suivis de deux astérisques correspondent à des photocopieurs n'ayant eu aucune défaillance.

1. Donner une estimation de $R(t)$ en utilisant la méthode de Kaplan-Meier :
2. Donner une estimation du MTTF et du paramètre λ , en considérant que l'on peut modéliser le temps de bon fonctionnement des éléments étudiés par une loi exponentielle.

Exercice 5

Un fabricant de voitures affirme que la consommation moyenne de ses voitures est de 4,7 litre de carburant pour 100 km (en ville). Un organisme de défense des consommateurs prélève au hasard un échantillon de $n = 100$ voitures et observe une consommation moyenne de 4,83 litre pour 100 km avec un écart-type $\sigma = 0,3$ litre.

1. Déterminer un intervalle de confiance de niveau 0,99 pour la consommation moyenne m .
2. Peut-on accuser ce fabricant de publicité mensongère ?

Exercice 6

On désire savoir si l'âge des candidats au permis de conduire influe sur leur réussite. A cette fin, on les classe en trois catégories d'âge et on construit le tableau ci-dessous à partir des résultats obtenus au premier passage à l'examen par 656 candidats.

Age = a	$18 \leq a \leq 25$	$26 \leq a \leq 55$	$55 \leq a$	Total
Réussite	153	151	28	332
Echec	185	91	48	324
Total	338	242	76	656

Quelle est la conclusion ?